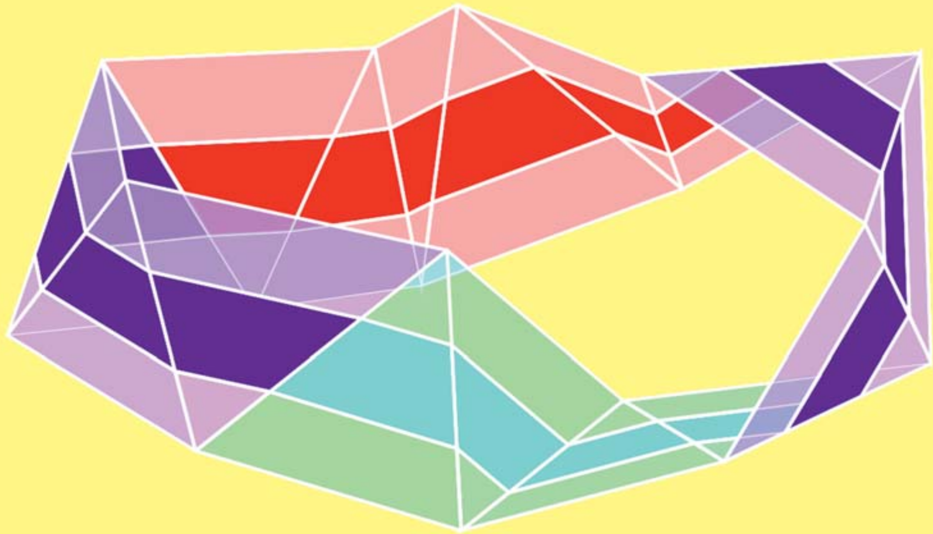

Jürgen Bokowski

Schöne Fragen aus der Geometrie

Ein interaktiver Überblick über gelöste und noch offene Probleme

Springer Spektrum

Schöne Fragen aus der Geometrie

Jürgen Bokowski

Schöne Fragen aus der Geometrie

Ein interaktiver Überblick über gelöste und noch offene Probleme

Springer Spektrum

Jürgen Bokowski
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Darmstadt, Deutschland

ISBN 978-3-662-61824-0 ISBN 978-3-662-61825-7 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61825-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Für **Barbara Maria Martha Alma** *und*
unsere Kinder mit ihren Ehepartnern:
Boris mit Petra und Julia mit Rainer
und für unsere sieben Enkel:
Kira Malou,
Josephine Katharina Marie,
Felix Kolia,
Leonhard Paul Ferdinand,
Finn Bennet,
Wanja Marlin,
Konstantin Carl Theodor

Vorwort

Auf die Frage, was ich beruflich mache, möchte ich gerne ausführlich antworten, aber mein Gegenüber hat in der Regel nur die Schulmathematik als mathematisches Hintergrundwissen. Besonders bei interessiertem Nachfragen, möchte ich gerne mehr über offene Fragen in der Geometrie berichten, ohne den Gesprächsstoff fachspezifisch werden zu lassen. Dieser Wunsch kann als mein Ausgangspunkt angesehen werden, einige Kapitel über forschungsrelevante Fragen in der Mathematik aufzuschreiben mit dem Ziel, dass fachfremde Personen sie verstehen können. Natürlich bleiben die Aussagen auch für an der Mathematik begeisterte Leser relevant. Zu vielen Aspekten mathematischer Erklärungen habe ich Modelle angefertigt. Sie unterstützen den Einstieg in die Welt der Geometrie. Zum Text finden die Leser zahlreiche Bilder und oft wird das Verständnis der dargestellten Zeichnungen und Modelle zusätzlich durch Filme auf YouTube gefördert. So wie ein Zeitungsleser aus vielen Bereichen ohne Spezialwissen Informationen aufnimmt, wünsche ich mir, dass viele Leser große Teile des Textes verstehen, wobei sie sich so fühlen sollten, wie sich Zoobesucher an Tieren erfreuen, die sie erstmalig sehen. Mein Wunsch, Teile der Geometrie verständlich erklärt zu haben, mag nicht immer in Erfüllung gehen, aber ich habe jedenfalls versucht, das Niveau niedrig zu halten durch Verzicht auf Beweise und durch Unterstützung durch viele Zeichnungen, Modelle und Filme.

Darmstadt, Mai 2020 *Jürgen Bokowski*

Danksagung

Die fast dreißig mathematisch motivierten Keramik-Modelle des Autors wurden über viele Jahre vom Autor selbst im Töpferatelier von Gabriela Hein in Wiesbaden gefertigt. Ihr gebührt mein herzlicher Dank für die stete beratende Unterstützung, um meine mathematischen Ideen zur Form, eine Keramikversion werden zu lassen. Der Wechsel von der sonstigen Fertigung von Objekten der Teilnehmer an den Töpferkursen von Gabriela Hein zu den ihr ungewöhnlichen Formen aus der Mathematik führte in der Anfangsphase bis hin zum letzten Modell immer wieder zu Streitgesprächen von der Art *Das geht so nicht* bis zum gefeierten Ergebnis: *Es gab beim Brennen keine Probleme*. Für die mir dadurch ermöglichten Ausstellungen der Modelle in Darmstadt, Ungarn, Österreich und Slowenien und vor allem für die Verwendung der Modelle in dieser Monografie danke ich ihr außerordentlich herzlich.

Für die gewissenhafte Durchsicht des gesamten Textes mit ihrem mathematischen Hintergrundwissen danke ich sehr herzlich meiner ehemaligen Doktorandin Frau Dr. Susanne Mock. Herzlichen Dank lieber Leonhard für die Hilfe bei der Produktion einiger Filme mithilfe der komplexen Software Blender. Deine kompetente Unterstützung hat mir viel Zeit erspart. Die ständige Begleitung während der Entstehung des Buches durch Frau Dr. Annika Denkert und später auch durch Frau Janina Krieger war mir eine sehr hilfreiche Unterstützung bei der Copyrightproblematik und bei allen weiteren Aspekten, die zu einem erfolgreichen Gelingen des Manuskriptes führten.

Jürgen Bokowski

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Einleitung

Zusammenfassung Große Teile der Mathematik sind nur für wenige Experten verstehbar. Daher wird der Öffentlichkeit wenig über forschungsrelevante Aspekte der Mathematik vermittelt. Kann man als Mathematiker eine Auswahl von Forschungsproblemen aus der Mathematik oder einige interessante Anwendungsbeispiele der Mathematik einem Abiturienten erklären, wenn die Mathematik-Kenntnisse aus der Schule eher verblasst sind? Kann man einem Mathematik-Lehrer einige ungelöste Probleme aus der Mathematik erklären, die zur Beschreibung nur den Einsatz elementarer Begriffe aus der Mathematik erfordern? Dann könnte er solche Probleme auswählen, die er für einen möglichen Einsatz in der Schule einstuft. Das vorliegende Buch möchte Antworten auf diese Fragen geben. Die Fülle der standardmäßig an Universitäten für alle Fachbereiche vermittelten Kenntnisse der Mathematik müssen anderen Lehrwerken vorbehalten bleiben. Bei Problemen aus der Geometrie sollen meine Modelle und viele Abbildungen helfen, einen schnellen Zugang zu ausgewählten Problemen der Geometrie zu finden.

1.1 An wen wendet sich das Buch?

Ich wende mich mit dem Buch an Leser, die (noch) keine Experten auf dem Gebiet der Geometrie sind. In der Regel werde ich den unter Mathematikern üblichen Wunsch, zu den Aussagen auch Beweise zu liefern, nicht erfüllen. Ich möchte aktuelle und vor allem ungelöste Probleme beschreiben, ohne die Leser zu überfordern. Der Verzicht auf Beweise soll die Lesbarkeit verbessern. Es bleibt dennoch genug aus der Geometrie zu berichten. Das Buch soll einen verständlichen Überblick über einen Teil der Geometrie geben und dafür sind mathematische Beweise in der üblichen Form nicht notwendig (oder hilfreich).

Teile des Buches sind aus meiner Sicht für einen interessierten Zeitungsleser geeignet, der Zeitungsartikel zur Mathematik vermisst hat. Insbesondere soll eine Auswahl forschungsrelevanter Probleme aus der Geometrie mit elementaren Methoden so beschrieben werden, dass der Leser mit einer geringen eher spielerischen Erweiterung seiner Schulmathematik in die Lage versetzt wird, sich eine Vorstellung von der Arbeit eines Geometers zu verschaffen.

Zusatzmaterial online
Zusätzliche Informationen sind in der Online-Version dieses Kapitel (https://doi.org/10.1007/978-3-662-61825-7_1) enthalten.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020
J. Bokowski, *Schöne Fragen aus der Geometrie*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61825-7_1

Wenn sich ein Leser unserer Zeit für ungelöste Probleme der Mathematik interessiert, dann wird er im Internet unter Wikipedia eine Antwort suchen. Unter den Stichworten *Ungelöste Probleme in der Mathematik* oder *List of unsolved problems in mathematics* findet er dazu viele kompetente Aspekte. Aber selbst ein forschender Mathematiker bleibt danach erstaunt, in wie wenig der angesprochenen Fälle er dazu einen verständlichen und kompetenten Kommentar für einen interessierten Nicht-Spezialisten liefern kann. Immerhin der Eindruck verbleibt, dass es eine große Anzahl ungelöster Probleme in der Mathematik gibt, eine eher unbekannte Tatsache für einen an der Wissenschaft interessierten Menschen. Unter Wikipedia finden wir: *Im Prinzip lassen sich beliebig viele ungelöste mathematische Probleme beschreiben.* Die Beschränkung auf mathematische Probleme, die der Geometrie zugeordnet werden können, ändert an dieser Aussage wenig, aber in diesem Teilgebiet der Mathematik sind eher unterstützende Zeichnungen anzufertigen, die die Probleme beschreiben helfen. In einigen Fällen stelle ich den Lesern Zeichnungen zur Verfügung, die interaktiv bewegt werden können. Beispielsweise kann man das Ikosaeder in Abb. 1.1 durch die dynamische Zeichensoftware Cinderella, [14], bewegen, wenn man die Ecken des Spurdreiecks in der Zeichnung mit der Maus in eine andere Lage verschiebt. Das *Spurdreick* hat die Eckpunkte, die durch den Schnitt der drei Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems in allgemeiner Lage mit der Zeichenebene entstehen, auf die wir in diesem Fall das Ikosaeder senkrecht projizieren.

Vor etwa 60 Jahren erschien das Buch von Herbert Meschkowski, [17], mit dem Titel *Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie*. Vielleicht hat Meschkowski an ähnliche Leser gedacht, an die sich dieses Buch ebenfalls richten will. Aber in den letzten sechs Jahrzehnten hat die Mathematik eine erstaunliche Entwicklung erfahren, und die Bereiche der Geometrie in diesem Buch spiegeln auch Teile meiner Forschungstätigkeit in den letzten 50 Jahren wider.

Es wäre schön, wenn der Mathematikunterricht an Schulen und Universitäten nicht nur die eher rezeptartige Vermittlung von Lösungen zu Aufgaben beschreiben, sondern die Mathematik so verständlich vermitteln würde, wie sie sich den an der Mathematik beteiligten Forschern darstellt. In den Medien wird über Mathematik selten berichtet. Einen Nobelpreis für Mathematik gibt es nicht, und Berichte über die Verleihung der Fields-Medaille (eine vergleichbare Auszeichnung für Mathematiker) wird kaum von der Öffentlichkeit wahrgenommen. Fragen von der Art: *Was machst Du als Mathematiker?* oder: *Wozu ist das gut?* haben mir oft gezeigt, dass diese Aspekte in der Schulmathematik selten angesprochen werden. *Forschung im Bereich der Mathematik? Man kennt doch schon alle Zahlen!* Diese Bemerkung einer Schülerin mag typisch sein für das fehlende Wissen über ungelöste Probleme in der Mathematik in der Öffentlichkeit. Dieses Buch soll jedenfalls meine Antwort sein auf die Frage, was ich als Mathematiker zu lösen versuche. Die intensive Beschäftigung mit der Mathematik im Wettstreit mit den international konkurrierenden Forschern hat nicht zuletzt den Effekt, dass unser Wissen über Lösungsmethoden in der Mathematik ständig auf diesem Gebiet erweitert wird und dass dieses Wissen dadurch an zukünftige Generationen weitergegeben wird. Für das Denken der unterschiedlichen Berufe gibt es Situationen, in denen speziell der Fachmann gefragt ist. So wird man sich im Streitfall mit dem Nachbarn an einen Rechtsanwalt wenden, bei Gesundheitsproblemen sucht man einen Arzt auf, und bei Verhaltensauffälligkeiten wendet man sich an einen Psychologen. Das bedeutet aber auch, dass es Bereiche gibt, in denen der Mathe-

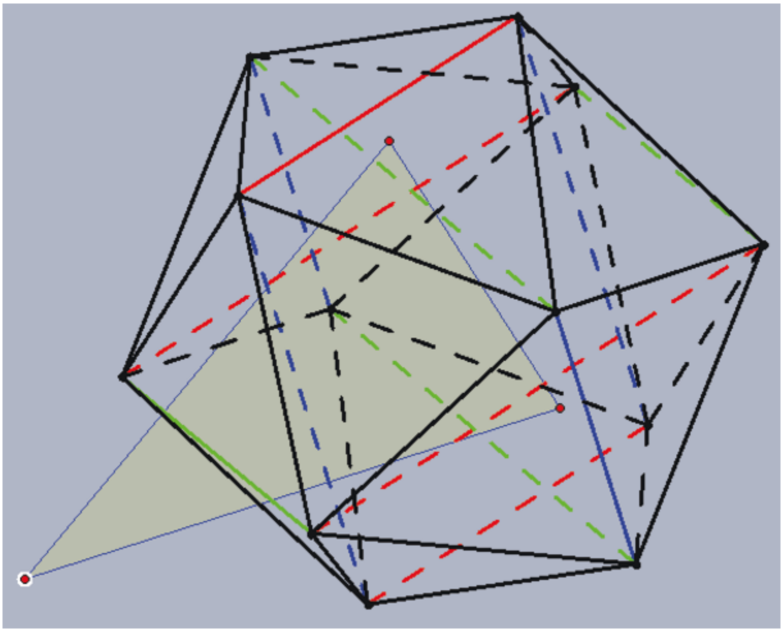

Abbildung 1.1 Das Ikosaeder kann bewegt werden, wenn man die zugehörige Cinderella Datei verwendet und darin die Eckpunkte des Spurdreiecks mit der Maus bewegt. Über den QR-Code kann man sich einen Film dazu ansehen. Das Ikosaeder ist eines der fünf platonischen Körper und betrifft das Kapitel über platonische Körper und deren Analoga und daher auch das Kapitel über reguläre Karten. Felix Kleins *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* betrifft ebenfalls ein wichtiges Beispiel einer regulären Karte, war aber auch entscheidend für die Wiederbelebung des Studiums von Punkt-Geraden-Konfigurationen in der Ebene

matiker als Fachmann anzusprechen ist. Die Lehre für Studenten fast aller Fachbereiche einer Universität benötigt Teile der Mathematik, die von Hochschullehrern aus dem jeweiligen Fachbereich Mathematik angeboten werden. Bei Ingenieuren des Maschinenbaus, bei Informatikern, bei Bauingenieuren und bei Wirtschaftsingenieuren fällt es besonders leicht, auf solche erforderlichen Kenntnisse hinzuweisen; bei Medizinern oder Psychologen erwartet man aber ebenfalls Grundkenntnisse aus der Stochastik oder bei Architekten Informationen aus der Statik.

Dieses Buch will eine Reihe von Beispielen aufzeigen, die forschungsrelevante Probleme aus der Mathematik betreffen, die einfach beschreibbar sind. Die Lösungsmethoden darzustellen, erfordert oft erheblich mehr mathematisches Wissen. Ich halte mich daher mit mathematischem Fachwissen zurück, um die Leser eher zu gewinnen. Eine Vielzahl offener Probleme in der Mathematik wird für den Leser dadurch erkennbar.

Aspekte der Mathematik einer größeren Öffentlichkeit verständlich zu beschreiben, kann nicht durch ein einziges Buch gelingen. Ich verweise dazu exemplarisch auf Mathematiker des 19. Jahrhunderts, wie etwa den bedeutenden Geometer Felix Klein, vgl. Abb. 1.2, der im Vorstand des Deutschen Museums in München gewirkt hat. Ein bedeutendes Ergebnis von ihm betrachten wir im Kapitel über reguläre Karten. Der Mathematiker Walt-

Abbildung 1.2 Der berühmte Mathematiker Felix Klein hat in seiner Erlanger Antrittsrede, 1872, geschrieben, vgl. [13]: *Aber vom allgemein menschlichen Standpuncte ist die geringe Verbreitung mathematischer Kenntnisse zu beklagen.* Dieses vorliegende Buch wendet sich an eine mathematisch interessierte Leserschaft, die an der positiven Korrektur dieses Sachverhaltes interessiert ist. Felix Klein formulierte auch: *Ist doch bei der eigenthuemlichen Schwierigkeit, welche jede ungewohnte mathematische Gedankenoperation mit sich fuehrt, eine einmalige mathematische Vorlesung nur zu leicht selbst engeren Fachkreisen unverstaendlich!* Durch den Einsatz nur weniger unbekannter Konzepte sollen Problemstellungen in diesem Buch verständlich werden. Quelle: Bildarchiv des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach

her von Dyck, dessen reguläre Karte uns auch im achten Kapitel begegnen wird, war sogar Mitbegrnder dieses Museums.

Kehren wir zurück zu dem, was mit einem Buch erreicht werden kann. Wer an einem Einstieg in die Welt der Mathematik bis hin zu offenen Fragen in der Mathematikforschung interessiert ist und dabei mit wenigen mathematischen Vorkenntnissen auskommen möchte, wie es ein Zeitungsleser für andere Thematiken gewohnt ist, dem werden mit dieser Monografie mehrere entsprechende Kapitel angeboten. Es ist dabei auch gut möglich, dass Studenten der Mathematik, Kollegen oder Mathematiklehrer daraus lernen können, einerseits sind evtl. für sie die Probleme für sich interessant, andererseits werden sie möglicherweise angeregt, wie auch sie ihre mathematischen Themen einer größeren Öffentlichkeit, und sei es auch nur im Gespräch auf einer Party, darstellen können. So wie die Physiker in ihren Vorlesungen ihre mathematischen Methoden benutzen, ohne die Hörer mit Beweisen zu belasten, oder so wie Ärzte ihren Patienten medizinische Erkenntnisse vermitteln, ohne dabei viel Fachvokabular zu verwenden, möchte ich einige offene Fragen aus der mathematischen Forschung dem interessierten Leser erklären, wie sie sonst in den Medien kaum vermittelt werden. Nach der Idee, das oben beschriebene Vorhaben in die Tat umzusetzen, wurde mir klar, wie wenig eine solche spezielle Sammlung offener Probleme in der Mathematik beim Leser eine Korrektur gewachsenen Verständnises der

Mathematik erreichen kann. Auch die Einsichten in die Forschung anderer Fachgebiete, nehmen wir als Beispiele etwa die Medizin, die Physik oder die Psychologie, kann kaum von einem einzelnen Fachvertreter allein kompetent beschrieben werden. Meine Aufgabe entspricht etwa dem Versuch eines Abiturienten, einem Schulanfänger seine Kenntnisse nach der Abiprüfung zu beschreiben.

Die Liste von offenen Problemen in der Mathematik wird ständig in den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik von jedem Forscher mehr oder weniger beobachtet, von einigen besonders intensiv gesammelt und von Zeit zu Zeit in Forschungsmonografien veröffentlicht, vgl. dazu z.B. *Handbook of Convex Geometry*, herausgegeben von Gruber und Wills, [6]. Die Frage nach der Anwendungsrelevanz, die häufig gestellt wird, hat in diesen Listen viele ausgezeichnete Beispiele. Ich würde beispielsweise jedem Raucher gerne das Verfahren aus der Integralgeometrie erläutern, wie man seine Lungenoberfläche ausmessen kann, wenn sie sich am Ende seines Lebens stark verkleinert hat, vgl. den Springer-Kalender von 1979 [15] und [5].

In diesem Buch werden nach Möglichkeit nur wenige ungewohnte Gedankenoperationen durchgeführt. Bei der häufig gestellten Frage, wo die eine oder andere Thematik aus der Mathematik ihre Anwendungen hat, bezieht sich die Thematik häufig allein auf die Anwendungen der Schulmathematik und nicht auf die Mathematik, die erst nach dem Studium der Mathematik und evtl. einer weiteren Spezialisierung zum Einsatz in Medizin, Physik, Maschinenbau, Informatik und allen weiteren Studienrichtungen kommt. Dieses Buch soll einen interessanten Ausschnitt an leicht erklärbaren forschungsrelevanten Fragestellungen beschreiben. Eine Antwort auf die Frage nach der Anwendungsrelevanz der Mathematik beantworte ich indirekt durch die Vielzahl der Vorlesungen der Hochschullehrer aus dem Fachbereich Mathematik für die anderen Fachbereiche einer Universität.

1.2 Hilfreiche Software zum Verständnis

Der Einsatz von Rechnern und speziellen Softwareprogrammen hat in vielen Bereichen der Mathematik die Bearbeitung von mathematischen Problemen verbessert. Der Umgang mit kostenpflichtiger entsprechender Software, aber auch der Einsatz von frei verfügbarer Software ist erstaunlich angewachsen. Die meisten Mathematiker schreiben ihre Veröffentlichungen mit dem international frei verfügbaren Schreibprogramm für mathematische Texte *Latex*. Es ermöglicht das Anfertigen von Schriftstücken durch seine komfortablen Möglichkeiten der Formelsetzung gegenüber üblichen Textverarbeitungssystemen, allerdings erfordert das Schreibprogramm im Vergleich zu herkömmlichen Textverarbeitungssystemen eine längere Einarbeitungszeit. Die Einarbeitungszeit ist auch bei anderer Software zum Umgang mit mathematischen Objekten nicht zu vernachlässigen. Studenten schreiben häufig lieber ein neues Programm in einer ihnen bekannten Programmiersprache, als sich in ein vorhandenes Programmsystem einzuarbeiten. Wir gehen im Folgenden auf die Software, die für dieses Buch benutzt wurde, kurz ein.

1.2.1 Die dynamische Zeichensoftware: Cinderella

Wir benutzen für dieses Buch eine dynamische Zeichensoftware *Cinderella* mit Dateien der Endung *.cdy* [14]. Wir empfehlen jedem, dieses Programmsystem für eigene Zeichnungen zu testen. Der große Vorteil eines dynamischen Programms besteht in der Möglichkeit einer späteren Veränderung der Parameter, die man im Laufe der Erstellung der Zeichnung benutzt hat. Damit lassen sich Größenveränderungen nachträglich vornehmen. Bei vielen mathematischen Problemen kann aber auch eine weitere Bedingung zu einem späteren Zeitpunkt getestet werden. Wenn bei den für dieses Buch erstellten Abbildungen der dynamische Aspekt für den Leser hilfreich ist und wenn das Verständnis durch die eigene interaktive Betrachtung verbessert werden kann, dann empfehle ich, sich die entsprechende Quelldatei vom Springer-Verlag herunterzuladen und mit der Maus in Cinderella die entsprechende Animation nach eigenen Gesichtspunkten zu erzeugen. Die Autoren der Software Jürgen Richter-Gebert und Ulrich Kortenkamp haben nicht zuletzt an Benutzer im Schulbetrieb gedacht, sodass die Handhabung einfach gestaltet wurde. Gerade bei der Thematik der Punkt-Geraden-Konfigurationen nach dieser Einleitung, bei der auch vom Autor einer Forschungsmonografie, Branko Grünbaum, eine dynamische Zeichensoftware aus den USA eingesetzt wurde, habe ich *Cinderella* als sehr hilfreich empfunden. In Abb. 1.3 sehen sie die Symbole für die Werkzeuge in Cinderella, die dem Benutzer durch kurze Hinweise erklärt werden.

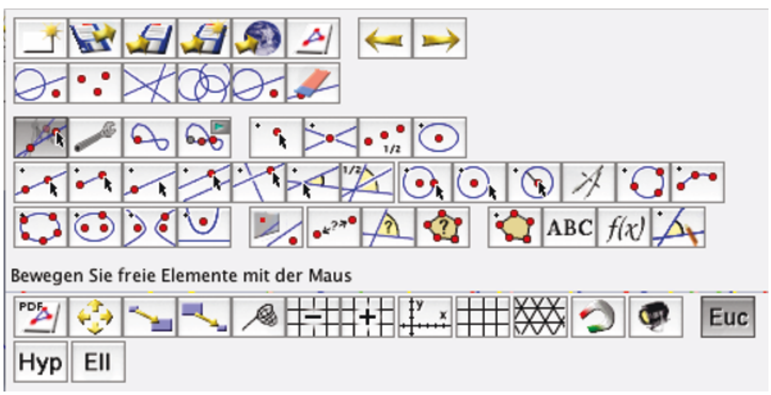

Abbildung 1.3 Ein Teil der Benutzeroberfläche der dynamischen Zeichensoftware Cinderella [14]

Es kann z.B. sein, wie im ersten Beispiel im letzten Abschnitt bei Abb. 1.1, dass eine variable Projektion interaktiv vom Benutzer erzeugt werden kann, sodass man ein räumliches Objekt besser versteht. Die Software Cinderella ist zwar für zweidimensionale Zeichnungen gedacht, aber es gibt Interpretationen, die auch höherdimensionale Aspekte veranschaulichen können. Ich habe eine große Anzahl von Zeichnungen für dieses Buch mit Cinderella erstellt. Natürlich erfordert der Umgang mit jeder Software eine gewisse Einarbeitungszeit, aber viele geometrische Optionen, wie etwa der Übergang zur polaren Zeichenoberfläche oder der Einsatz projektiver Transformationen, um nur zwei Aspekte herauszugreifen, sind für manche Anwendungen in der Geometrie höchst wertvoll. Davon habe ich an mehreren Stellen Gebrauch gemacht.

1.2.2 Die 3-D-Software: Blender

Eine andere mit sehr vielen 3-D-Optionen versehene und frei verfügbare Software wurde für eine Reihe von Bildern in diesem Buch herangezogen. Sie hat den Namen *Blender*, sie verwendet die englische Sprache und erfordert weit mehr Kenntnisse, um sie für eigene Zwecke einzusetzten. Aber die Option, sich dreidimensionale Objekte auf dem Bildschirm anzusehen, sie zu drehen und den Maßstab zu verändern, wenn die Objekte schon erstellt wurden, ist denkbar einfach. In Abb. 1.4 sieht man ein Modell mit sieben Henkeln. Die Komplexität wird erst gut erkannt, wenn man das Objekt selbst drehen kann. Dies ist mit der Software Blender leicht möglich. Wenn man die Software installiert und eine .blend-Datei geladen hat, dann muss man nur mit der Maus auf einen der Farbpunkte in der oberen rechten Ecke gehen und kann dann das Objekt mit der Maus bewegen. Zusätzliche Erklärungen zum Umgang mit dieser Software Blender findet man in vielen Videos unter YouTube.

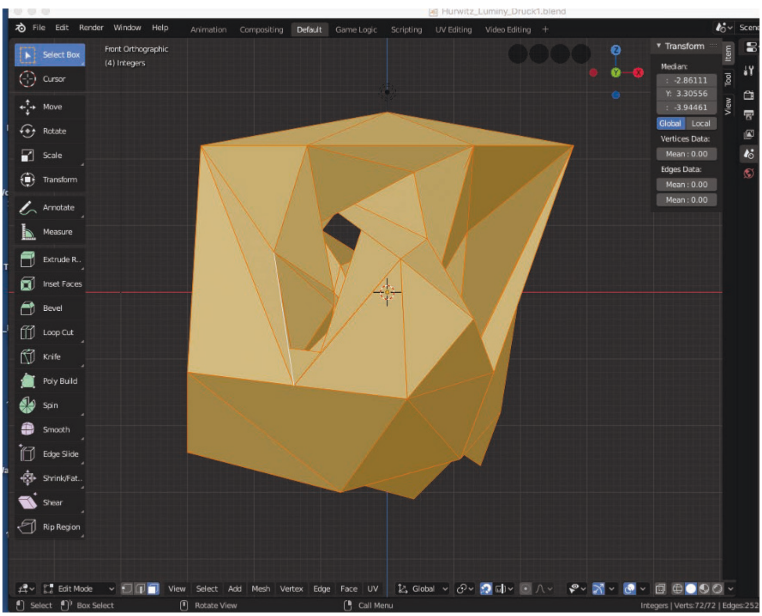

Abbildung 1.4 Ein Polyeder als Standbild in einem Blender-Fenster. Durch die Bewegung mit der eigenen Maus gewinnt man ein besseres Verständnis. Über den QR-Code kann man sich einen Film dazu ansehen

Noch einmal: Die Blender-Software einzusetzen erfordert je nach Zielsetzung eine umfangreichere Einarbeitungszeit. Sie erlaubt aber erstaunlich viele Möglichkeiten, um mit 3-D-Objekten umzugehen. Eine schöne Option ist die Erzeugung der ebenen Seitenflächen eines Polyeders in wahrer Gestalt. Und das ist nur der Beginn für die vielfältige Farbgebung komplexer Modelle. Das Beispiel in Abb. 1.5 zeigt ein weiteres Polyeder in einer durchschnittsfreien Realisation von Egon Schulte und Jörg M. Wills aus dem Jahr 1985 zu der regulären Karte von Felix Klein aus dem Jahr 1879. Die 56 Dreiecke dieses Polyeders sind im linken Teil des Bildes in wahrer Gestalt abgebildet.

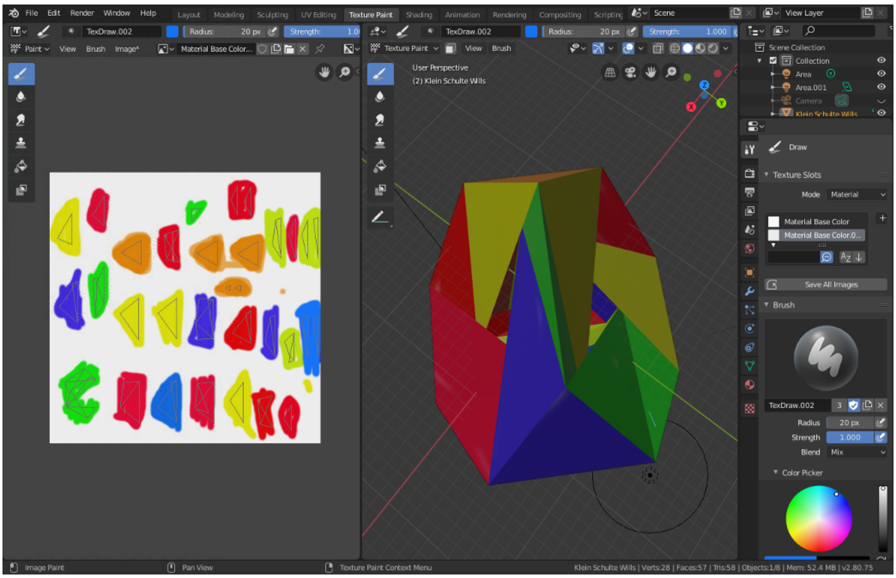

Abbildung 1.5 Eine Option von Blender zeigt alle Seiten eines Polyeders in wahrer Gestalt (im Bild links) und man kann sie färben

Wenn es für ein geometrisches Objekt sinnvoll ist, um es z.B. besser zu verstehen oder wenn die Komplexität des Objekts eine einwandfreie 3-D-Darstellung erfordert, dann stelle ich die entsprechende Datei im .blend-Format den Lesern zur Verfügung. Die räumlichen Objekte können dann mit der Software Blender gedreht werden.

Ich stelle auch eine (farblose) stl-Datei zur Verfügung, die mit vielen 3-D-Programmen betrachtet werden kann. Eine App, um sich stl-Dateien auf einem Smartphone mit dem Betriebssystem Android anzusehen ist: *Fast STL Viewer*.

1.2.3 Das Programmsystem für mathematische Gruppen: GAP

Wer einführende Aspekte zur Gruppentheorie aufgenommen hat, wird sich die Software GAP für endliche Gruppen ansehen wollen oder sie schon kennen. Wer aber diese Kenntnisse nicht besitzt, dem werde ich einige Beispiele von Permutationsgruppen erklären und dabei GAP benutzen. GAP steht für Groups, Algorithms, and Programming und ist eine frei verfügbare Software.

1.3 Welche Thematiken werden behandelt?

Wir stellen in diesem Abschnitt aus den einzelnen Kapiteln eine Übersicht bereit, die die behandelten Themen kurz vorstellen. Dabei halten wir uns an die Reihenfolge nach der Einleitung, die diesem Buch zugrunde liegt.

1.3.1 Punkt-Geraden-Konfigurationen

In Kap. 2 über Punkt-Geraden-Konfiguration behandle ich Probleme in der Ebene. Diese Thematik erscheint auf den ersten Blick besonders einfach. Höhere Dimensionen sind dabei nicht im Spiel. Zwei Bücher sind in den letzten Jahren über diese Punkt-Geraden-Konfigurationen erschienen, zunächst ein umfassendes Werk von B. Grünbaum, [9], im Jahr 2009, mit vielen Referenzen aus alter Zeit und später, im Jahr 2013, ein Buch aus graphentheoretischer Sicht zu dieser Thematik von T. Pisanski und B. Servatius, [18]. Nach dem Erscheinen dieser Bücher wurden einige dort untersuchte Probleme gelöst, die ich in Verbindung mit ungelösten Problemen behandle.

Es geht in diesem Kapitel um Punkt-Geraden-Konfigurationen, von denen wir in Abb. 1.6 ein wichtiges Beispiel sehen. Es zeigt eine Punkt-Geraden-Konfiguration mit 21 Geraden. Es gibt dazu $3 \times 7 = 21$ Punkte, durch die jeweils vier dieser Geraden verlaufen. Von diesen 21 Punkten liegen dann jeweils vier auf jeder der 21 Geraden. Diese Konfiguration wurde zunächst im Komplexen von Felix Klein behandelt und bildete durch Grünbaum und Rigby [10] vor etwa 30 Jahren den Ausgangspunkt, über reelle Punkt-Geraden-Konfigurationen nachzudenken, wie es Mathematiker bereits im 19. Jahrhundert begonnen hatten.

Die uralten projektiven Inzidenztheoreme von Pappus (ca. 300 n. Chr.) und Desargue (1593-1662) haben zu verallgemeinerten Fragestellungen geführt, bei denen man den Eindruck gewinnen kann, dass es einfach zu lösende Probleme sind. Der Schein kann aber trügen.

Zur Desargue-Konfiguration, bzw. dem Schließungssatz von Desargue, betrachte man Abb. 1.7, und man denke an die folgenden Schritte einer Konstruktion.

- Man startet mit vier schwarzen Punkten in allgemeiner Lage, diese Punkte bilden dann eine projektive Basis,

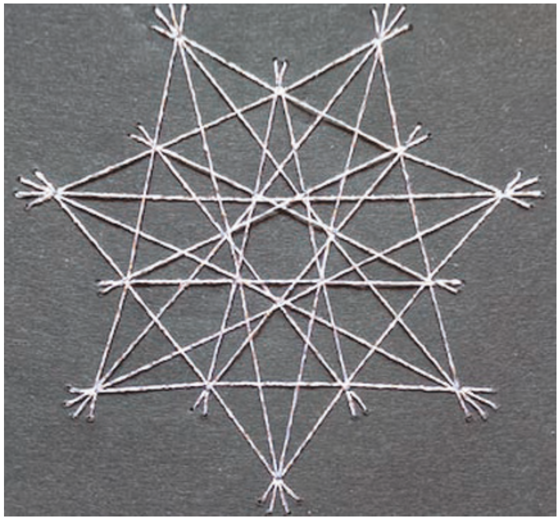

Abbildung 1.6 Eine auf dem Weihnachtsmarkt bestellte Punkt-Geraden-Konfiguration, die von Grünbaum und Rigby [10] in der reellen Ebene gefunden wurde. Ausgangspunkt dazu war eine komplexe Version von Felix Klein. Mathematische Objekte haben oft auch für sich ihren Reiz. Es sind vor allem die Methoden, mit denen man Probleme lösen kann, die Mathematiker sammeln. Bei Konfigurationen stellte sich heraus, dass auch die algebraische Geometrie an den Untersuchungen über Konfigurationen interessiert ist

- man zeichnet die sechs Verbindungsgeraden durch die Paare der schwarzen Punkte,
- man wählt ein grünes Dreieck durch drei schwarze Eckpunkte,
- auf den drei Geraden, die keine Seiten des Dreiecks bilden, wählt man jeweils einen weiteren grünen Punkt und damit ein zweites Dreieck.

Dann liegen die Schnittpunkte der Geraden, die entsprechende Seiten der Dreiecke bilden, auf einer (roten) Geraden.

Bei dieser Thematik sollte der Leser den Übergang von der uns gewohnten euklidischen Ebene zu der projektiven Ebene verstehen. In der projektiven Ebene haben auch parallele Geraden einen Schnittpunkt, und die entsprechenden Aussagen über projektive Inzidenztheoreme und verallgemeinerte Punkt-Geraden-Konfigurationen vereinfachen sich damit. Daher ist es gut, wenn der Leser in diesem Kapitel die projektive Ebene kennenlernt.

Das Konzept der Pseudogeraden-Arrangements, vgl. z.B. [8], erlaubt es, die geometrischen Konfigurationen zu topologischen Konfigurationen zu verallgemeinern. Problemlösungen für geometrische Konfigurationen wurden gefunden, indem man die Fragestellung zunächst in der Verallgemeinerung zu Pseudogeraden-Arrangements behandelt hat, um danach wieder zu den geometrischen Konfigurationen zurückzukommen. Eine Situation, die der Mathematiker bei der Behandlung der reellen Nullstellen von Polynomen kennt. Man betrachtet zunächst alle komplexen Nullstellen (deren Anzahl ist nur vom Grad des Polynoms abhängig), um danach über die reellen Nullstellen nachzudenken.

Natürlich ist es stets berechtigt, nach den Anwendungen mathematischer Methoden zu fragen, aber es gibt bisweilen auch den Bezug zur Kunst in der Mathematik und oft haben symmetrische Objekte in der Mathematik eine schöne Ausstrahlungskraft. Gerade bei der Untersuchung von Punkt-Geraden-Konfigurationen haben symmetrische Konfigurationen eine besondere Rolle gespielt. Das Beispiel einer beweglichen Konfiguration mit 78 Punkten und 78 Geraden von Leah Berman in Abb. 1.8 und das Beispiel von Grünbaum

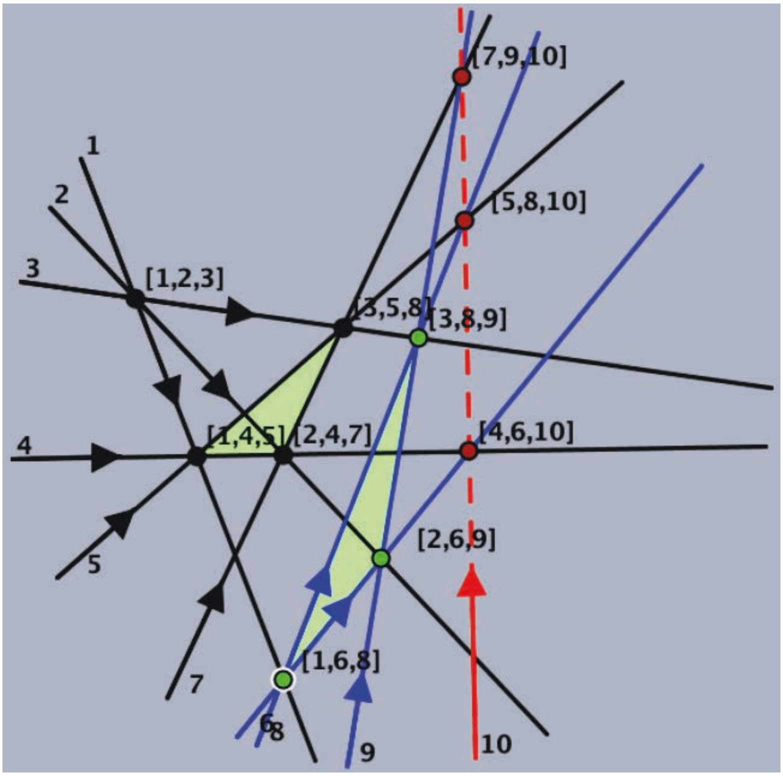

Abbildung 1.7 Die Desargue-Konfiguration bzw. der Schließungssatz von Desargue

mit einer Konfiguration von 60 Punkten und von 60 Geraden in Abb. 1.9 zeigen schöne Ergebnisse in diesem Sinne.

Von einem Kollegen aus Slowenien, Tomasz Pisanski, erhielt ich in einer Mail die folgende Beschreibung einer Anwendung einer Punkt-Geraden-Konfiguration. In der Zeit vor den Wahlen eines Präsidenten in Slowenien gab es acht Kandidaten. Der nationale Fernsehsender beabsichtigte, zwei Wochen lang jeden Tag eine Fernsehdebatte mit jeweils drei Kandidaten zu senden, nicht aber an Wochenenden und nicht am Freitag, der für Sport reserviert blieb. Jeder Kandidat bekam drei Termine, und es sollten nie zwei Kandidaten mehrfach zusammentreffen. Der Fernsehsender fand dafür keine Lösung. Tomasz Pisanski schrieb dem Fernsehsender einen Brief mit der Lösung, die ihm als Möbius-Kantor-Konfiguration als Lösung bekannt war. Die acht Kandidaten werden dabei als acht Punkte gedeutet, und die acht Fernsehdebatten deutet man als Geraden. Bei den nächsten Wahlen wurde er mit einer Kollegin (Arjana Zitnik) vom dortigen Fernsehsender in Slowenien für die Strukturierung der Sendezeiten der nächsten Fernsehdebatten als Beraterteam hinzugezogen.

Wir deuten in Abb. 1.10 die acht Kandidaten als rote Punkte und die acht Wochentage durch schwarze (Montag), blaue (Dienstag), braune (Mittwoch) oder grüne (Donnerstag)

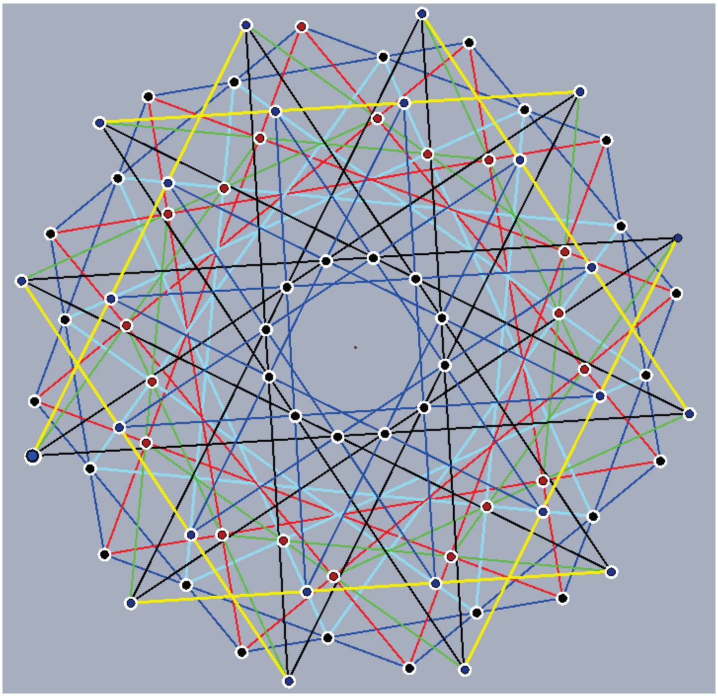

Abbildung 1.8 Eine Punkt-Geraden-Konfiguration mit 78 Punkten und 78 Geraden. Durch jeden Punkt gehen vier Geraden, und auf jeder Geraden liegen vier Punkte. Der größer dargestellte blaue Punkt links kann mit der Maus in der zugehörigen Cinderella Datei bewegt werden. Dabei bleibt die Konfigurationseigenschaft erhalten

Kreise. Dann stellen wir fest, dass es auch möglich ist, jedem Kandidaten drei verschiedene Wochentage für seine Fernsehdebatten zu geben. Es gibt zwei Arbeiten dazu in slowenischer Sprache. In einem Fall existiert dazu eine Zusammenfassung in englischer Sprache:

`www.obzornik.si/51/1578-Pisanski-Zitnik-abstract.pdf`

1.3.2 Zellzerlegte geschlossene Flächen

In Kap. 3 behandle ich geschlossene Flächen, die sich durch Anfügung von Henkeln an eine Sphäre oder an die projektive Ebene ergeben. Wenn man Zellzerlegungen dieser Flächen betrachtet, dann gibt es eine Reihe von interessanten Ergebnissen, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

Ich betrachte insbesondere in Kap. 3 Polyeder ohne Diagonalen. Das Tetraeder ist jedem bekannt als ein solches Polyeder ohne Diagonalen, aber die von Möbius angegebene Zellzerlegung des Torus in Abb. 1.11 würde ebenfalls ein solches Polyeder ohne Diagonalen liefern. Kann man ein solches Polyeder finden? Die Antwort ist positiv. Wir sehen uns

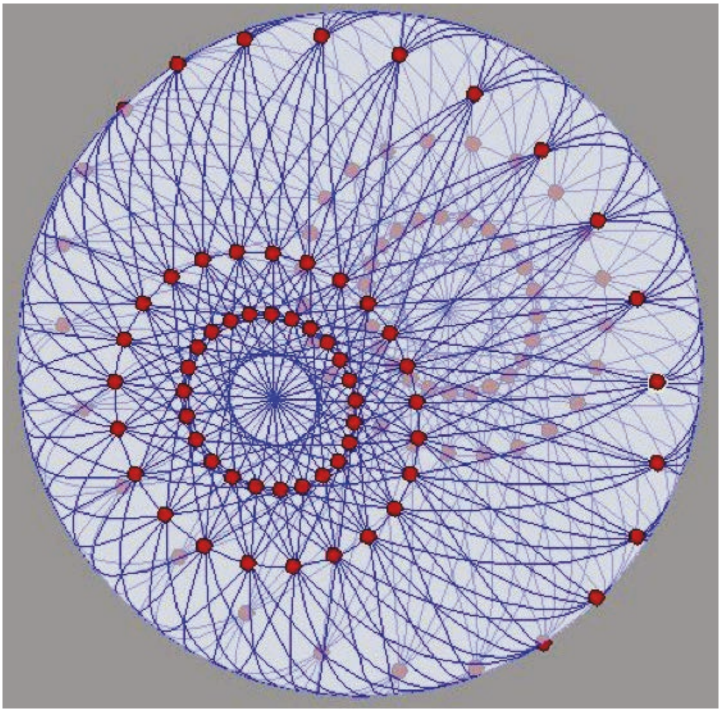

Abbildung 1.9 Eine Punkt-Geraden-Konfiguration mit 60 Punkten und 60 Geraden. Durch jeden Punkt gehen fünf Geraden, und auf jeder Geraden liegen fünf Punkte. Gegenüberliegende Punkte auf der Kugel zählen dabei nur einfach

die vier verschiedenen symmetrischen Beispiele dazu an. In Abb. 1.12 ist eine Version als Explosionszeichung zu sehen.

Lange Zeit war es unbekannt, ob man ein Polyeder ohne Diagonalen mit zwölf Ecken im dreidimensionalen Raum finden kann. Die Verbindungsstrecken aller Punktpaare wären dann Kanten des Polyeders. Von jeder Ecke gehen dann elf Kanten aus, aber man hätte so die Kanten doppelt gezählt. Die Anzahl der Kanten ergibt sich daher zu $12 \times 11/2 = 66$. Jede Kante hat zwei Dreiecke als Nachbarn, dann hat man aber jedes Dreieck dreimal gezählt. Die Anzahl der Dreiecke ergibt sich daher zu $66 \times 2/3 = 44$. Die zunächst 66 krummen Kanten sieht man in einem Modell in Abb. 1.13. Die Antwort, ob man zu den insgesamt 59 wesentlich verschiedenen denkbaren Polyederversionen jeweils eine Version mit ebenen Kanten und durchschnittsfreien Dreiecken finden kann, gibt ein Ergebnis im Kapitel über zellzerlegte geschlossene Flächen.

Wenn man die Polyederdefinition verallgemeinert und nicht darauf besteht, dass die Facetten an einer Ecke eine zyklische Reihenfolge bilden, dann erhält man weitere Beispiele von Polyedern ohne Diagonalen. Auch diese eher unbekannten Polyeder werden in Kap. 3 vorgestellt.