Dietmar Herrmann

Mathematik im Mittelalter

Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam

Springer Spektrum

Mathematik im Mittelalter

Dietmar Herrmann

Mathematik im Mittelalter

Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam

Springer Spektrum

Dietmar Herrmann
FH München
München, Deutschland

ISBN 978-3-662-50289-1 ISBN 978-3-662-50290-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-50290-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Germany
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

> Wir würden uns nicht für das Verwenden der Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht einsetzen, wenn wir nicht der Meinung wären, dass die Geschichte den entscheidenden Unterschied ausmacht. Die Einbeziehung der Geschichte in den Mathematikunterricht kann für Schüler und Lehrer von Vorteil sein auf ganz unterschiedliche Weise.
> Studenten können das Fach als das Tun von Personen erleben, das entdeckt, erfunden, geändert und im Laufe der Zeit von anderen erweitert wird. Anstatt die Mathematik als ein Fertigprodukt anzusehen, können sie erleben, wie die Mathematik sich stetig ändert und einen wachsende Hort des Wissen darstellt, zu dem sie selbst beitragen können. Die Lernenden werden eine Vorstellung entwickeln über die dabei ablaufenden Prozesse, den erreichten Fortschritt und die dabei wirkenden sozialen und kulturellen Einflüsse kennenlernen.
> Wenn ein Dozent die eigene Wahrnehmung und sein Verständnis der Mathematik ändert, wird dies seine Art des Unterrichtens beeinflussen und folglich auch die Wahrnehmung der Studenten.
> Aus dem Report „History in Mathematics Education“ der ICMI-Studie, Eds. Fauvel & Van Maanen, 2000.

Dieses längere Zitat wurde aus der ICMI-Studie übernommen, zum einen, weil man den Sachverhalt kaum prägnanter formulieren kann, zum andern, um an die *traurige* Hochschulsituation der Mathematikgeschichte in Deutschland zu erinnern. Sämtliche Lehrstühle sind geschlossen worden, die speziell für die Geschichte der Mathematik vorgesehen waren: Universität Leipzig: Lehrstuhl Prof. Wussing 1992, Sudhoffinstitut Leipzig: letzter Dozent Dr. Thiele (2008), Hamburg: Lehrstuhl von Frau Prof. Reich, München: Lehrstuhl von Prof. Folkerts und an der Akademie Berlin-Brandenburg die Stelle von Prof. Knobloch. Wahrlich kein Ruhmesblatt für Deutschland, das weltweit die erste Professur für Mathematikgeschichte ausgeschrieben hatte; die vier Vorlesungsbände von Prof. Moritz Cantor haben selbst schon Wissenschaftsgeschichte geschrieben.

Dieser Band enthält zum ersten Mal in deutscher Sprache wichtige Episoden der chinesischen und indischen Mathematik und vermittelt neuartige, vielfältige Einblicke in die orientalischen Mathematik: Diese bietet zahlreiche, überraschende Fragestellungen, die erst Jahrhunderte später von europäischen Mathematikern in Angriff genommen wurden. Die herkömmliche Geschichtsschreibung, Eurozentrismus genannt, beruht auf der Annahme, die Mathematik sei allein in Griechenland erfunden und von islamischen

Gelehrten nach Europa vermittelt worden. Aber die Rolle der islamischen Wissenschaft geht weit über die bloße Übersetzung hinaus; sie ergänzt bestehende Fragestellungen und entwickelt mit der Algebra einen neuen Zweig der Mathematik und integriert das Positionssystem der indischen Zahlen. Aus den Moscheen Byzanz‘ und dem islamischen Unterricht in Nordafrika bringt Leonardo von Pisa die Algebra und ihre Aufgabenkultur nach Europa. Die Bücher der Abakus-Schulen verbreiten dieses Wissen über Deutschland in ganz Europa. Die italienischen Mathematiker lösen das Problem der Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades und liefern damit einen weiteren Meilenstein der Entwicklung der Algebra. Die ersten gedruckten Bücher der deutschen Rechenmeister dienen als Vorbild und bringen eine ungeheure Popularisierung der allgemeinen Rechenfertigkeit mit sich; sie legen damit schon den Grundstein für die künftige Entwicklung der Mathematik der Neuzeit.

Eine ganze Reihe von neuen Akzenten wird gesetzt. So wird das bekannte „Tagebuch des Walahfrid“ untersucht, die Autorenschaft von Alkuin bei den „Aufgaben zur Verschärfung des Verstandes Jugendlicher“ geprüft. Auch das Rätsel über die angeblich „fehlenden“ Jahre des Mittelalters wird gelöst. Zu neuen Themen wie „Eurozentrismus“ und „Ethnomathematik“ wird Stellung bezogen. Das Wirken des Fridericus Amann in Regensburg neu entdeckt, den man bisher als Fridericus Gebhard kannte. Anschaulich und ausführlich wird auf das Leben Leonardos von Pisa eingegangen, den ein Forscher 1838 einfach Fibonacci taufte und dessen Schriften die Quelle der abendländischen Algebra darstellen. Neue Gesichtspunkte ergaben sich auch bei der Geschichte von Byzanz und der islamischen Wissenschaft. Unterhaltsam wird die frühe Geschichte der Universitäten und ihre Magister geschildert. Völlig neu ist die Darstellung der indischen und chinesischen Mathematik, es hat in den letzten 30 Jahren kein vergleichbares Buch in deutscher Sprache dazu gegeben. Die ostasiatische Mathematik präsentiert ganz überraschende und erstaunliche Probleme, sicher zur Freude der Leserin bzw. des Lesers.

Eine anregende Lektüre und Vergnügen beim Problemlösen wünscht der Autor!

München, Deutschland Dietmar Herrmann

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

1

Wer sich aber wundern sollte, dass nach so vielen Geschichtsschreibern auch mir die Abfassung einer solchen Schrift in den Sinn kommen konnte, der lese zuvor alle Schriften jener anderen durch, mache sich darauf an die meinige, und dann erst wundere er sich (Flavius Arrianos, 95–180 n. Chr.).

1.1 Zur Einführung: Der Eurozentrismus

„In diesem Buch habe ich beschlossen, aus Gründen der Einfachheit auf diakritische Zeichen bei Namen zu verzichten, die aus dem Arabischen oder Indischen stammen. Bei chinesischen Wörtern und Namen habe ich mich der alten traditionellen Schreibweise bedient“, schreibt ausgerechnet George Gheverghese Joseph zu Beginn seines berühmten Buchs *The Crest of the Peacock, Non-European Roots of Mathematics,* das als erstes populäres Werk gegen den *Eurozentrismus* in der mathematischen Geschichtsschreibung Stellung bezieht.

Der Eurozentrismus beinhaltet die Annahme, dass die Mathematik im Wesentlichen in Altgriechenland entstanden und die Überlieferung über lateinische und islamische Übersetzungen (als Kopie) ins Abendland gekommen ist. Die Herkunft des Dezimalsystems aus Indien wird anerkannt, sonstige Beiträge anderer Kulturkreise werden als geringfügig abgetan. Bei der Mathematikgeschichte von O. Becker und J. E. Hofmann (1951) umfasst das Kapitel „Mathematik der Inder und des Islams“ nur 15 Seiten. Die 1238 Seiten umfassende Mathematikgeschichte *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* von Morris Kline beginnt mit der Feststellung: „Mathematik als eine systematische, unabhängige und vernunftbegründete Disziplin existierte nicht, bevor die klassischen Griechen (600 v. Chr. bis 300 n. Chr.) die Szene betraten.“ Die Mathematik der Inder und Araber wird auf nur 17 Seiten abgehandelt.

D. Herrmann, *Mathematik im Mittelalter,* DOI 10.1007/978-3-662-50290-7_1

Als Bewegung gegen den Eurozentrismus wurde 1985 die International Study Group on Ethnomathematics gegründet; die treibende Kraft dabei war Ubi d'Ambrosio. Ebenfalls etablierte sich der erste internationale Kongress für Ethnomathematik, die erste Veranstaltung fand 1998 In Granada statt. Die Ethnomathematik ist ein neuer Zweig der kulturellen Anthropologie, der sich mit Denkmustern *aller* ethnischen Gruppen beschäftigt. Das Sonderheft des Spektrum-Verlags (2006) zählt u. a. folgende Themen auf:

- Zählungen am Ishango-Knochen (Afrika),
- Arithmetik der Maya,
- Knotenschnüre (Quipus) der Inka,
- keltische Flechtwerke,
- Lusona-Muster der Chokwe (Afrika),
- Kolam-Muster in Südindien.

Die zuletzt erwähnten Kolam-Muster lassen sich interessanterweise mit den Regeln der Lindenmayer-Systeme aus der fraktalen Geometrie erzeugen. Die Professorin Marcia Asher definiert die Ethnomathematik als *das Studium von mathematischen Ideen von Völkern ohne Schrift (nonliterate peoples).* Die Gegner des Eurozentrismus wollen den Mythos Griechenland zerstören. Wie das dreibändige Werk von Martin Bernal *Black Athena: The Afroasiatic Roots of Classical Civilisation* zeigt, ist man bestrebt, die Out-of-Africa-Hypothese auch auf die griechische Kultur anzuwenden. Bernal liefert zwei Theorien über die Besiedelung des antiken Griechenlands, die er „ancient" und „Aryan" nennt. Die letztere geht von einer indoeuropäischen Einwanderung (früher indogermanisch genannt) nach Griechenland aus; diese bezeichnet Bernal als *Erfindung* westeuropäischer Gelehrter und philhellenischer Idealisten seit 1785 und behauptet, dafür gäbe es keine historischen Hinweise. Seinen Band I nennt er deshalb *Fabrication of Ancient Greece 1785–1985*. Es ist aber wohl bekannt, dass der Zwiespalt zwischen Sparta und Athen genau auf der Auseinandersetzung mit den eingewanderten Dorern beruht. Spuren eines dorischen Dialektes lassen sich sogar noch bei Archimedes in Sizilien nachweisen.

Bernal bevorzugt die Ancient-Theorie, die besagt, die griechische Kultur sei Folge der Kolonisation der Ägypter und Phönizier, die um 1500 v. Chr. stattgefunden habe. Ferner habe es später einen Kulturaustausch mit den Ländern Nordafrikas und der Levante gegeben. Dies ist ein Thema der Out-of-Africa-Bewegung, die *alles* in Afrika entstehen lässt. Einige Autoren dieser These vereinnahmen Alexandria als afrikanisches Kulturzentrum; dies stimmt *nur* geografisch. Jeder Kenner der griechischen Geschichte weiß, dass Alexandria eine makedonische Gründung und nach Alexanders Tod das Zentrum des *Hellenismus* war.

Das Vorwort des Sammelbands von Powell (1997) *Ethnomathematics, Challenging Eurocentrism in Mathematical Education* stimmt den Leser auf eine generelle Kritik am Wissenschaftsbetrieb Europas und der USA ein: Es wird unterstellt, dass die europäische Zivilisation (sprich: die Bildung des weißen und christlichen Mannes) kritiklos auf fremde Völker (als neue Art der Kolonisation) übertragen und der westliche

Bildungsstandard als Muster in den Schwellenländern etabliert wird, ohne auf deren andersgearteten Probleme einzugehen. Der Abdruck des berühmten Zitats von Karl Marx aus seinen *Thesen über Feuerbach* trägt einen sozialistischen Unterton: *Die Philosophen haben die Welt nur verschieden interpretiert; es kommt darauf an, sie zu ändern.* Das Zitat befindet sich auch in der Eingangshalle der Berliner Humboldt-Universität. Die Besprechung des Sammelbands im Zentralblatt der Mathematik (ZDM 98/5) endet mit den euphorischen Worten:

> The World of Mathematics and mathematics education will never be the same.

Aus Umfangsgründen wird für weitere Informationen über Ethnomathematik und Eurozentrismus auf das beigefügte Literaturverzeichnis verwiesen. Ein interessantes Kapitel über die Mathematik der außereuropäischen Völker findet sich bei Grattan-Guiness (1993, S. 19–166).

1.2 Textaufgaben als *Fußspuren* der Mathematik-Historie

Im Folgenden wird gezeigt werden, dass die Probleme der Unterhaltungsmathematik universell sind und damit die Sicht des Eurozentrismus überwunden wird. Nach einem Motto von Frank J. Swetz[1] stellen diese Probleme *Fußspuren der Mathematikgeschichte* dar. Zur Vereinfachung der Sprechweise soll die Vielfalt dieser Probleme nach Vogel et al.[2] in Kategorien eingeteilt werden:

1. **Grüß-Euch-Gott-Aufgabe:** Der Prototyp findet sich in der Anthologia Graeca (XIV, 1). Die Aufgabe findet sich bei Pseudo-Alkuin, Rudolff und Ries. Im Columbia-Algorismus werden die Personen zu Tauben. Hier die Version von Abraham Ben Ezra:

   > Ein Mann ging an einer Gruppe vorbei und sagte zu ihnen: Seid gegrüßt, ihr 100. Darauf erwidern diese: Wir sind keine 100. Wenn wir noch so viele wären und die Hälfte und ein Viertel dazu, dann wären wir 100.

2. **Frage nach dem Alter:** Die erste Aufgabe dieser Art ist die bekannte Frage nach dem Alter des Diophantos, ebenfalls aus der Anthologia Graeca (XIV, 126). Das Problem wird übernommen von Pseudo-Alkuin, Leonardo von Pisa, im Algorismus Ratisbonensis (AR) und in den Annales Stadenses. Hier die Version aus einem Byzantinischen Rechenbuch des 14. Jahrhunderts (BY14):

[1]Swetz, F. J.: Mathematical Expeditions, Exploring Word Problems across the Ages. John Hopkins University, Baltimore (2012).

[2]Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. In: K. Vogel, K. Reich, H. Gericke (Hrsg.), S. 573 ff. de Gruyter, Berlin (1980).

> Jemand hatte den Wunsch, noch weitere 1/3 und 1/5 der Jahre seines Alters zu leben. Er wurde erhört und lebte [insgesamt] 135 Jahre. Wie alt war er, als er seinen Wunsch äußerte?

3. **Turm im Wasser:** Den Prototyp dieser Aufgabe formulierte Mahavira. Aus Indien geht das Problem zu Abū ’l-Wafā. Bei al-Kāšī wird der Turm zum Fisch. In den folgenden Büchern ist von einem Baum oder einer Stange die Rede: AR, Leonardo von Pisa, Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts (BY15), Bamberger Rechenbuch, Chuquet und Tartaglia. Die Version von Mahavira lautet:

   > Von einer Säule steckt 1/8 in der Erde, 1/3 im Wasser, 1/4 im Moor; 7 hastas sieht man in der Luft.

4. **Zisternen-Problem:** Das Problem stammt ebenfalls aus dem Chiu Chang Suan Shu (CCSS) (um 200 n. Chr.), ein bekanntes Beispiel findet sich wieder in der Anthologia Graeca *(Ich bin ein Löwe aus Erz)*. Die Aufgabe wanderte nach Indien und wird von Chaturveda, Bhaskara II und Mahavira verwendet. Bei den arabischen Autoren erwähnt sie Abū ’l-Wafā, al-Karağī. Ferner tritt das Problem auf in Byzanz (BY15) und im Abendland bei Leonardo von Pisa, Pacioli, Tartaglia, dem Columbia-Algorismus und dem AR. Hier die chinesische Version:

   > 5 Kanäle führen einem Teich Wasser zu. Öffnet man den ersten Kanal, erhält man die Füllung in 1/3 Tagen, beim zweiten in 1 Tag, beim dritten in 2½ Tagen, beim vierten in 3 Tagen und beim letzten in 5 Tagen. In wie viel Tagen füllen alle den Teich?

5. **Wächter des Apfelgartens:** Hier die Aufgabe bei Leonardo von Pisa:

   > Jemand sammelt Äpfel in einem Obstgarten, der von 7 Mauern mit Toren umgeben ist. Beim Wächter des ersten Tores muss die Person die Hälfte aller Äpfel abgegeben und einen mehr, am zweiten Tor wieder die Hälfte der verbleibenden Äpfel und einen zusätzlich. Analog geschieht es bei den restlichen 5 Toren. Am Ende bleibt ein Apfel übrig.

   Der Aufgabentyp stammt aus China und findet sich in Indien bei Mahavira und Bhaskara II, im Islam bei Abū ’l-Wafā und al-Kāšī, in Byzanz in (BY15). Im Abendland wird das Problem behandelt bei Leonardo von Pisa, in den Annales Stadenses, bei Pacioli, Tartaglia und Ries. Originell ist die Version aus Vietnam:

   > Ein Eierverkäufer steht am Markt und verspricht einen günstigen Preis, wenn der Kunde die Hälfte der jeweils vorhandenen Eier und dazu ein halbes kauft. Der erste Kunde kauft zu der genannten Bedingung, ebenso ein zweiter und ein dritter. Nach dem dritten Kauf ist der Eierkorb leer.

6. **Mehrfaches Spenden:** Hier die Version des Armeniers Anania Schirakazi (610–685):

   > Ein Mann besucht nacheinander 3 Kirchen und bittet Gott, sein jeweils vorhandenes Geld zu verdoppeln, er werde jeweils 25 dahekan spenden. Nach der dritten Spende hat er kein Geld mehr übrig.

Ähnliche Aufgaben finden sich in Byzanz (BY15) und in den Annales Stadenes.

7. **Börsenproblem:** Das Muster des Börsenproblems finden wir bei Mahavira:

   3 Kaufleute finden einen Geldbeutel auf der Straße. Sagt der erste, wenn er den Beutel behält, dann wird er zweimal so reich, entsprechend der zweite dreimal bzw. der dritte fünfmal so reich wie zuvor.

   Die Aufgabe findet sich in Italien bei Leonardo da Pisa, Pacioli, Tartaglia und im deutschsprachigen Raum im AR und bei Ries.

8. **Einer allein kann nicht kaufen:** Eine erste Formulierung dieses Problems zeigt das CCSS, hier die Version von al-Karağī:

   3 Personen kaufen ein Zugtier für 100 dirhem. Der erste sagt, er brauche zur Kaufsumme 1/3 des Geldes der anderen. Der zweite sagt, er benötige 1/4, der dritte 1/5 des Geldes der anderen.

   Die Aufgabenstellung wird oft dahin gehend verallgemeinert, dass auch der Einkaufspreis gesucht ist; es handelt sich dann um ein unbestimmtes System. Das Problem findet sich nicht in Indien, dafür im Islam bei al-Karağī, in Byzanz (BY14) und in allen bekannten italienischen und deutschen Rechenbüchern.

9. **Bewegungsaufgaben:** Der Prototyp einer Bewegungsaufgabe im CCSS ist:

   A bricht von Changan nach Ch'i auf und braucht 5 Tage. B bricht von Ch'i auf und benötigt 7 Tage nach Changan. Wenn nun B zwei Tage früher aufbricht, wann treffen sie sich?

   Diese Art der Aufgaben erfuhr zahlreiche Einkleidungen: Zwei Ratten bohren sich durch eine Wand, zwei Pflanzen wachsen von unten nach oben bzw. umgekehrt. Auch das Problem wird komplizierter: Die Bewegung erfolgt auf einem Kreis oder einem rechtwinkligen Dreieck, die Bewegungsrichtung ändert sich ständig oder die Tagesstrecken wachsen wie eine arithmetische Folge.

10. **Verfolgungsprobleme:** Die bekannte Aufgabe „Hund verfolgt Hase" findet sich bereits im Chiu Chang Suan Shu:

    Der Hase war zuerst 100 Schritt gelaufen. Ein Hund verfolgt ihn auf 250 Schritt, er bleibt 30 Schritt vom Hasen entfernt stehen. Wie viele Schritte hätte er noch machen müssen, um den Hasen zu erreichen?

    Das Hasen-Hund-Problem war sehr populär und findet sich bei Pseudo-Alkuin, Leonardo von Pisa, BY15 und beim AR.

11. **Zerlegung einer Zahl:** Den Prototyp der Aufgabe liefert Diophantos im ersten Buch seiner Arithmetik:

> Eine Zahl (10) soll so in zwei Teile zerlegt werden, dass zwei Bruchteile (1/3 bzw. 1/5) eine vorgegebene Summe (30) ergeben.

Es ist also das System $x + y = 10 \;\therefore\; \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 30$ lösen. Besonders häufig findet sich die Aufgabe im Islam bei al-Khwārizmī, al-Karağī und im Abendland bei Leonardo von Pisa, im Columbia-Algorismus, bei Cardano, Tartaglia, Rudolff und Ries. Oft wird die Nebenbedingung so geändert, dass die Aufgabe nichtlinear wird.

12. **Ungleiche Verteilung:** Eine frühe Aufgabe aus dem Papyrus Rhind (65):

> 100 Laib Brote sollen an 10 Leute verteilt werden, dabei erhalten der Bootsmann, der Vorarbeiter und der Türsteher die doppelte Portion. Wie viel Brot erhält jeder?

Ähnliche Aufgaben finden sich in CCSS und bei Pseudo-Alkuin (Verteilung an Geistliche).

Weitere bekannte Aufgabentypen sind die aus China stammenden Probleme der 100 Vögel und der chinesische Restsatz; beide Probleme finden sich mehrfach im Buch. Die hier aufgeführten Wanderungen der Textaufgaben werden auf einer Landkarte (Abb. 1.1) dargestellt.

Die ältesten mathematischen Dokumente sind die in Mesopotamien (Uruk) gefundenen sumerischen Tontafeln (um 3200 v. Chr.); seit 1500 v. Chr. existieren assyrisch-babylonische Keilschrifttafeln. Durch spätere Eroberungen Babyloniens gelangen Kenntnisse nach Persien und Griechenland. Wie Ptolemaios von Alexandria (um 150 n. Chr.) berichtet, gab es eine kontinuierliche Überlieferung der babylonischen

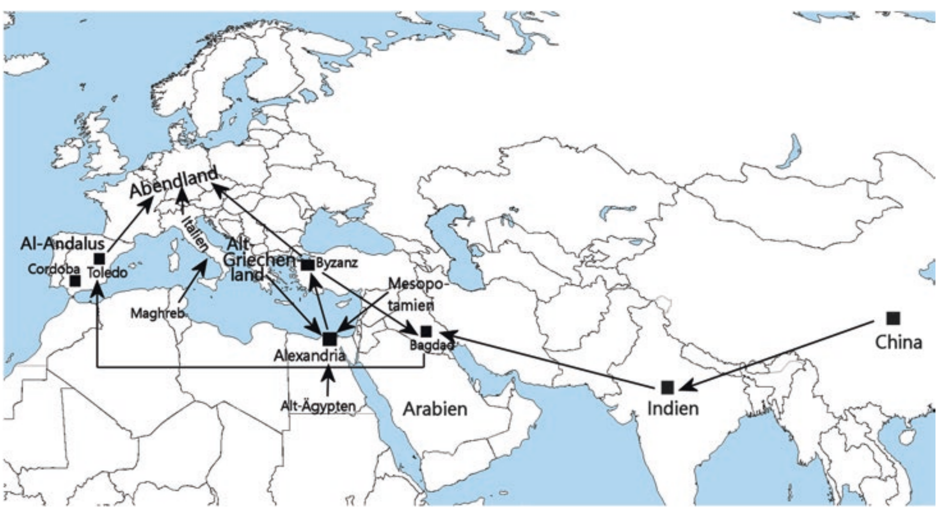

Abb. 1.1 Überlieferungswege der Textaufgaben

Astronomiebeobachtungen an Griechenland seit *Nabonassar*. Dessen Regierungszeit ist durch eine Mondfinsternis im Jahr 747 v. Chr. datiert. Der älteste mathematische Papyrus *Reisner* Altägyptens stammt aus der Zeit um 1950 v. Chr. Da die Pyramide von Djoser bereits um 2700 v. Chr. gebaut wurde, kann man davon ausgehen, dass bereits zuvor Mathematik betrieben wurde.

Die ältesten mathematischen Dokumente[3] Chinas sind die erst kürzlich entdeckten Bambustäfelchen aus der Zeit der Streitenden Reiche (475–221 v. Chr.). Die Anwendung der Kalenderrechnung kann auch bei astronomischen Aufzeichnungen Chinas vorausgesetzt werden. Das älteste astronomische Datum ist gegeben durch die Hinrichtung der Astronomen Xi und He für das Versäumnis, die Sonnenfinsternis vom 3. Oktober 2137 v. Chr. vorherzusagen. Damit steht fest, dass die Ursprünge der Mathematik in Mesopotamien, im alten Ägypten und in China zu finden sind.

Die älteste Sulvasutra-Schrift Indiens von Baudhayana soll um 600 v. Chr. entstanden sein, der Inhalt ist nur aus späterer Überlieferung bekannt. Festzustellen ist, dass die Datierung indischer Dokumente oftmals schwierig ist. Beispiel dafür ist das Bakhshali-Dokument aus Birkenrinde, dessen Alter zwischen 200 und 1200 n. Chr. schwankt.

Alle griechischen Schriften wurden in der berühmten Bibliothek von Alexandria und später in Byzanz gesammelt. Ab dem 8. Jahrhundert übersetzten islamischen Gelehrte in Bagdad Manuskripte aus allen besetzten Gebieten, wie Persien, Syrien, Indien und Griechenland. Nach der Zerstörung Bagdads wurde das Übersetzungswerk in Toledo und Cordoba fortgeführt, auch noch nach der Reconquista. Ebenfalls aus Byzanz gelangten viele Manuskripte durch lateinische Übersetzungen ins Abendland. Leonardo von Pisa erhielt nach eigenen Angaben Kenntnisse der islamischen Mathematik aus Byzanz und Nordafrika.

1.3 Eine Methode geht um die Welt – die *Regula Falsi*

Die *Regula Falsi* war jahrhundertelang bis zur Renaissance die Standardmethode zur Lösung von linearen Gleichungen, bis die Rechenregeln der Algebra das explizite Auflösen erlaubten. Betrachtet wird hier die lineare Gleichung $ax - b = 0$.

A) **Zweifache *Regula Falsi:*** Setzt man die Näherungswerte $x_1, x_2 \neq x$ ein, die die Gleichung nicht exakt erfüllen, so erhält man hier die Abweichungen d_1, d_2

$$ax_1 - b = d_1 \quad \therefore \quad ax_2 - b = d_2$$

Einsetzen für b liefert:

[3] german.china.org.cn/culture/txt/2014-01/09/content_31136012.htm (besucht 01.02.2016).

$$ax_1 - ax = a(x_1 - x) = d_1 \Rightarrow a = \frac{d_1}{x_1 - x}$$
$$ax_2 - ax = a(x_2 - x) = d_2 \Rightarrow a = \frac{d_2}{x_2 - x}$$

Gleichsetzen ergibt schließlich

$$\frac{d_1}{x_1 - x} = \frac{d_2}{x_2 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$$

In den Zeiten, in denen man noch nicht mit negativen Zahlen rechnen konnte, musste hier eine entsprechende Fallunterscheidung gemacht werden.

B) **Einfache *Regula Falsi:*** Es sei x die Lösung von $ax = b$. Nach Einsetzen eines Wertes $x_1 \neq x$ in die lineare Gleichung erhält man einen Wert $b_1 \neq b$

$$ax_1 = b_1 \;\therefore\; ax = b \Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{b_1}{x_1}$$

Die Unbekannte x wird damit bestimmt zu

$$x = \frac{b}{b_1} x_1$$

Historische Beispiele

Eine Reihe von Aufgaben lässt vermuten, dass die *Regula Falsi* bereits in Babylon und Ägypten bekannt war.

1. Eine babylonische Aufgabe aus VAT 8389 (VAT = *Vorderasiatisches Museum Berlin*) in der Interpretation von O. *Neugebauer* lautet:

   Der Ertrag eines Getreidefeldes [Volumeneinheiten/Fläche] beträgt $\frac{2}{3}$, ein zweites hat den Ertrag $\frac{1}{2}$. Die Flächensumme der beiden Felder ist 1800 [Flächeneinheiten]. Die Differenz der beiden Ernten beträgt 500. Welche Flächen haben die beiden Felder?

   Setzt man die Flächen *x,y,* so gilt das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 1800 \quad \therefore \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

   Der erste Ansatz gemäß der *Regula Falsi* mit gleichen Flächen $x_1 = y_1 = 900$ liefert den Fehler in der zweiten Gleichung:

$$d_1 = \left(\frac{1800}{3} - \frac{900}{2}\right) - 500 = -350$$

Um diese Differenz zu verringern, werden die Flächen um ± 300 modifiziert: $x_2 = 1200$; $y_2 = 600$. Dieser Ansatz führt zum Fehler Null. Damit ist das gesuchte Resultat bereits gefunden

$$\frac{2400}{3} - \frac{600}{2} = 500$$

Die Frage ist, wie sind die Babylonier auf die Korrektur ± 300 gekommen? Eine mögliche Erklärung ist: Ändert man die Fläche der Feldes um eine Einheit, so steigt der Ertrag um

$$\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

Damit die Flächenänderung den Fehler d_1 kompensiert, muss sie $\pm\frac{350}{\frac{7}{6}} = \pm 300$ betragen.

2. Eine Aufgabe aus dem Papyrus *Rhind:*
   100 Brote sollen unter 5 Leute verteilt werden, so dass $\frac{1}{7}$ der drei größeren Anteile gleich sind den beiden kleineren.
   Eine arithmetischer Reihe vorausgesetzt, macht man für die 5 Anteile den Ansatz $(a + 4d; a + 3d; a + 2d; a + d; a)$. Damit folgt

$$\frac{1}{7}(a + 4d + a + 3d + a + 2d) = a + d + a \Rightarrow 11a = 2d$$

   Der Papyrus setzt (gemäß der *Regula Falsi*) $a = 1$ voraus und erhält mit $d = \frac{11}{2}$ die folgenden Anteile mit der Summe 60

$$\left(23; \frac{35}{2}; 12; \frac{13}{2}; 1\right)$$

   Damit die Anzahl der Brote 100 wird, müssen die Anteile um den Faktor $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ vergrößert werden. Dies ergibt die gesuchten Anteile

$$\left(38\frac{1}{3}; 29\frac{1}{6}; 20; 10\frac{5}{6}; 1\frac{2}{3}\right)$$

3. Ein Haufen und sein Siebtel ist 19.
   Der Papyrus rechnet hier $19 : 8 = 2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ und $7 \times \left(2\frac{1}{4}\frac{1}{8}\right) = 16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ (in ägyptischer Bruchschreibweise). Setzt man in der Gleichung $x + \frac{x}{7} = 19$ probeweise $(x = 7)$, so

liefert die linke Seite den Wert 8; damit muss die Unbekannte um den Faktor $\frac{19}{8}$ vergrößert werden. Es folgt $x = \frac{19}{8} \times 7 = 16\frac{5}{8}$.

Kurt Vogel[4] erklärt den Rechengang dieser Aufgabe *ohne* Regula Falsi so: In Gedanken wird $x = 7t$ in 7 Teile geteilt. Einsetzen in die Gleichung liefert $8t = 19$ oder $t = \frac{19}{8}$. Die Lösung ist dann $x = t \times 7 = \frac{19}{8} \times 7$ (wie oben). Die Deutung als Anwendung der *Regula Falsi* ist also hier umstritten.

Die erste Erwähnung im Arabischen hat die *Regula Falsi* als *hisab al-katha'ayn* im frühen 9. Jahrhundert. In seinem Buch *Maqala li- Qusta ibn Luqa fi al-burhan 'ala 'amal hisab al-khata'ayn* bringt Quṣṭā ibn Lūqā folgendes Beispiel:

4. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 10$
   Beim Einsetzen von $x_1 = 4$ erhält er die Differenz $d_1 = 10 - 3 = 7$; entsprechend bei $x_2 = 8$ die Differenz $d_2 = 10 - 6 = 4$. Eine Steigerung von x um 4 bewirkt eine Verkleinerung des Fehlers um 3. Basierend auf den Anstieg $\frac{4}{3}$ ergibt sich beim Ansatz $x_2 = 8$ der Wert $8 + \frac{4}{3} \cdot 4 = 13\frac{1}{3}$. Qustā zeigt, dass beim folgenden Ansatz das gleiche Ergebnis resultiert

$$8 + \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 - 4 \cdot 4}{7 - 4}$$

   Die rechte Seite hat genau die Form der *hisab al-katha'ayn;* der Name weist auf China hin.

   Obwohl der Autor *Li Zhizao* (1565–1630) nicht mehr in den Zeitrahmen des Buchs fällt, soll hier noch eine originelle Aufgabe zur *Regula Falsi* besprochen werden. Nach der Landung Matteo Riccis in China erhielt man vom archimedischen Kronenproblem Kenntnis. In seinem Buch *Tongwen suan zhi* formuliert Li das Problem:

5. Ein Ofen sollte aus 100 *jin* reinen Goldes gefertigt werden. Nach der Fertigstellung wurde vermutet, dass der Goldschmied Gold auf die Seite geschafft und durch die gleiche Menge Silber ersetzt habe. Wie ist es möglich, die Menge Silber zu bestimmen, ohne den Ofen zu zerstören?

   Bei der Lösung wird die Angabe verwendet, dass die Menge 100 *jin* Gold 90 bzw. 100 *jin* Silber 60 *jin* Wasser verdrängen, der fertige Ofen 65 *jin.* Li löst die Aufgabe mittels der doppelten *Regula Falsi.* Der erste Ansatz $x_1 = 40$ *jin* ersetztes Gold impliziert die Verwendung von 60 *jin Gold,* der erreichte Auftrieb liefert die erste Differenz

$$\frac{40}{100} \times 90 + \frac{60}{100} \times 60 = 72 \Rightarrow d_1 = 72 - 65 = 7$$

   Der zweite Ansatz $x_2 = 30$ *jin* ersetztes Gold impliziert 70 *jin Gold,* der erreichte Auftrieb liefert die zweite Differenz

[4] Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik I. Schroedel, Hannover (1958), S. 55.

$$\frac{30}{100} \times 90 + \frac{70}{100} \times 60 = 69 \Rightarrow d_2 = 4$$

Die tatsächlich ersetzte Goldmenge ist

$$x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1} = \frac{40 \cdot 4 - 30 \cdot 7}{4 - 7} = \frac{50}{3}$$

Der Goldschmied hat also $16\frac{2}{3}$ *jin* Gold durch Silber ersetzt.

1.4 Eine Figur geht um die Welt – das magische Quadrat

Über die magischen Quadrate sind schon ganze Bibliotheken geschrieben worden. In Indien dienten sie zur Mythologie, in der Neuzeit verwendeten Agrippa von Nettersheim und Paracelsus sie als Amulette mit heilsamer Wirkung. Im Rahmen des Buchs können deshalb hier nur einige historische Punkte erwähnt werden.

Das älteste bekannte magische Quadrat *Lo Shu* fand sich auf dem Rücken einer heiligen Schildkröte (Abb. 1.2), die dem Fluss Lo entstieg und dem Kaiser Shu das Quadrat als göttliches Geschenk übergab – so erzählt die Sage. Yu soll etwa 2200 v. Chr. regiert haben. Bei seiner Entdeckung zwischen 600 und 800 v. Chr. hatte das Quadrat keine mathematische Bedeutung; es war vielmehr ein Objekt der Zahlenmystik: Die in

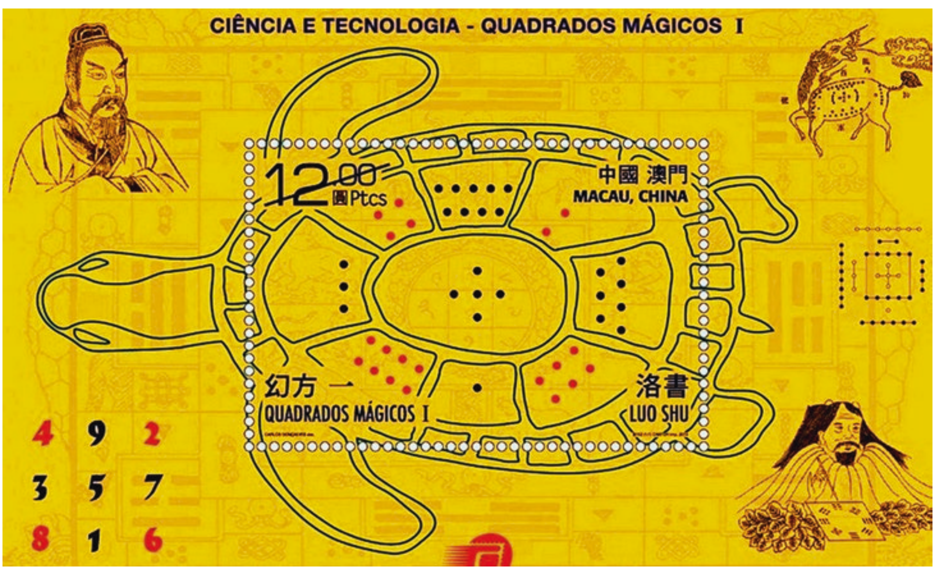

Abb. 1.2 Magisches Quadrat Lo Shu. (Briefmarke aus Macao)

der Mitte stehende „5“ bedeutet die Erde, die von ihren Elementen umgeben ist: „4“ und „9“ bedeuten Metall, „2“ und „7“ Feuer, „1“ und „6“ Wasser und schließlich „3“ und „8“ Holz, wobei hier gerade Zahlen das männliche bzw. ungerade das weibliche Prinzip repräsentieren, erkenntlich an verschiedenen Farbpunkten.

Das nächste bekannte magische Quadrat erscheint in Indien an dem Jaina-Tempel Parsha in Khajuraho (Abb. 1.3). Es stammt aus dem 11. oder 12. Jahrhundert und hat über die Eigenschaften eines magischen Quadrats hinaus noch zusätzliche Eigenschaften:

a) Jedes Unterquadrat mit 4 Elementen hat als Summe die magische Zahl 34. Beispiele sind $(1 + 14 + 8 + 11) = 34$ oder auch am Rand $(9 + 6 + 7 + 12) = 34$. Ein Unterquadrat an den Rändern ist $(6 + 15 + 12 + 1) = 34$.
b) Zwei Elemente auf einer beliebigen Nebendiagonale im Abstand 2 haben die Summe 17; dies ist die Hälfte der magischen Zahl. Beispiele auf der Nebendiagonale 16–13–1–4 sind die Paare (16, 1) oder (13, 4).

Ein solches magisches Quadrat heißt auch panmagisch oder diabolisch. Da Zeilen- und Spaltensumme bei Drehungen und Spiegelung erhalten bleiben, lässt sich eine Gruppeneigenschaft definieren. Etwas jünger ist das magische Quadrat von Yang Hui (um 1238–1298) aus der Zeit der Songdynastie, dessen Buch *Xiangjie jiuzhang suanfa* (Genaue Analyse der Rechenregeln) aus dem Jahr 1261 stammt (Abb. 1.4a).

Abb. 1.3 Magisches Quadrat von Khajuraho. (Wikimedia Commons)

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Abb. 1.4 Magische Quadrate von Yang Hui **(a)** und Pacioli **(b)**

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Von dem magischen Quadrat vierter Ordnung (magische Zahl = 34) gibt es 880 Anordnungen, wie K. H. des Haas in seiner Schrift *Frenicle's 880 Basic Magic Squares with 4 × 4 cells,* (Rotterdam 1935) nachweist. Der byzantinische Literat Manuel Moschopoulos führte 1315 das magische Quadrat in Europa ein; er gab Regeln zur Erstellung von Quadraten der Ordnung $2n + 1$ bzw. $4n$. Er hat vermutlich auf Schriften von al-Buni zurückgegriffen. Aus seinem Quadrat der Ordnung 4 entsteht durch Vertauschung der beiden mittleren Spalten das Jupiterquadrat im Codex *Pacioli* von 1498 (Abb. 1.4b). Dieses Quadrat wird auch von Agrippa von Nettesheim 1533 verwendet.

Durch Spiegelung an der senkrechten und waagrechten Symmetrieachse erhält man aus dem Jupiterquadrat das berühmte Quadrat des Holzschnitts *Melencholia I.* Der Künstler Albrecht Dürer ordnet die Zahlen so an, dass die untere Zeile sowohl die Jahreszahl 1514 wie auch seine Initialen zeigen (D = 4) und (A = 1). Die erste Spalte lautet (16, 5, 9, 4). Dürer verwendet hier noch eine ältere Form der „5“ und „9“. Die auf dem Holzschnitt zu sehenden Gerätschaften sind vermutlich Teile der wissenschaftlichen Geräte, die Dürer auf dem Dach seines Hauses von seinem Vorbesitzer Regiomontanus bzw. dessen Nachfolgers Walther vorgefunden hat.

Neben den üblichen Eigenschaften eines magischen Quadrats hat das Dürerquadrat (Abb. 1.5) noch weitere Eigenschaften:

a) Die Quadratsumme der beiden mittleren Diagonalen (4–6–11–13) bzw. (16–10–7–1) ist gleich der der oberen beiden Zeilen.
b) Die Quadratsumme der oberen beiden Zeilen ist gleich der der unteren beiden Zeilen.
c) Die Quadratsumme der ersten und dritten Zeile ist gleich der der zweiten und vierten Zeile.

Al-Hayṭam widmete sich auch mathematischen Themen. Die von ihm stammende Konstruktion eines magischen Quadrats der Ordnung 5 findet sich in Kap. 4 (Abb. 4.28).

Der französische Jesuit Simon de La Loubère, der als Diplomat von Ludwig XIV. nach Siam (1687/1688) gesandt wurde, brachte von dort eine Methode zur Erstellung

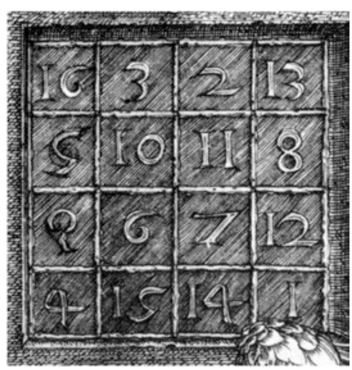

Abb. 1.5 Magisches Quadrat von Dürer. (Wikimedia Commons)

Abb. 1.6 Methode von de LaLoubère. (Briefmarke aus Macao)

magischer Quadrate mit, die er als seine Erfindung ausgab. Ein Beispiel des magischen Quadrats der Ordnung 5 nach La Loubère zeigt die Briefmarke von Macao (Abb. 1.6).

Der Algorithmus von La Loubère gilt nur für Quadrate ungerader Ordnung; er funktioniert nach folgenden Regeln:

> Man startet mit der Eins in der Mitte der ersten Zeile. Wenn die zuletzt geschriebene Zahl kein Vielfaches von n ist, dann trage die nächste Zahl in das Feld oben rechts vom zuletzt ausgefüllten Feld ein. Ist die zuletzt geschriebene Zahl ein Vielfaches von n, dann trage die nächste Zahl in das Feld unter der zuletzt geschriebenen Zahl ein. Verlässt man nach diesen Regeln das Quadrat nach oben, so schreibe die nächste Zahl ganz unten in die Spalte, die rechts der Spalte liegt, in die die letzte Zahl geschrieben wurde. Wird das Quadrat nach rechts verlassen, schreibe die nächste Zahl ganz links in die Zeile, die über der Zeile der zuletzt geschriebenen Zahl liegt.

1.5 Zum Inhalt des Buches

Nach der freundlichen Aufnahme des bei Springer erschienenen Buchs *Antike Mathematik* lag es für den Autor nahe, ein Werk über die Mathematik des Mittelalters mit ähnlichen Intentionen zu verfassen. Wie beim gleichnamigen Werk von A. P. Juschkewitsch sollte auch die Mathematik in China, Indien und im Islam als Quelle enthalten sein. Der Band *Mathematik in Antike und Orient* von H. Gericke (1984) behandelt alle drei genannte Gebiete auf nur 45 Seiten. Zur chinesischen und indischen Mathematik gibt es seit 30 Jahren zur islamischen kein neueres Buch (außer U. Rebstock) in deutscher

Sprache; *Mathematik im mittelalterlichen Islam* von Berggren ist eine Übersetzung aus dem Englischen.

Es leuchtet ein, dass bei einem so umfassenden Stoff eine Auswahl getroffen werden musste. Es wurde dabei versucht, durch eine interessante und originelle Auswahl von Aufgaben, Konstruktionen und Algorithmen eine anschauliche, neuartige Interpretation der mathematischen Ideen zu liefern; unterstützt von einer Vielzahl illustrierender Abbildungen. Durch zahlreiche Zitate, die ein wenig an die orientalische Erzählweise erinnern sollen, und geschichtliche Erläuterungen wird dem Leser ein anschauliches Panorama der Mathematik des Mittelalters aufgespannt. Mittels ausgewählter Aufgaben wird die Ausbreitung mathematischer Ideen von Ost nach West vor Augen geführt. Aus Umfangsgründen mussten auf einige Kapitel (Rechnen am Abakus und auf den Linien, Rithmomachia) verzichtet werden. Die Entwicklung der Mathematik des Abendlands bis zur Renaissance wird dargestellt in den Kapiteln Italien (Leonardo bis Cardano), Westeuropa (Oresme, Nemorarius, Chuquet) und deutscher Sprachraum (bis Adam Ries). Letzter wird exemplarisch für alle Rechenmeister der beginnenden Neuzeit besprochen.

Kap. 2 ist der chinesischen Mathematik gewidmet. Nach einer kurzen historischen Einleitung werden die zwei großen Aufgabensammlungen *Chiu Chang Suan Shu* (auch *Jiu Zhang Suan Shu* gelesen) und das Chang *Chiu-chien Suan Jing* besprochen, deren Probleme sich später in fast allen Rechenbüchern des Abendlands wiederfinden. Im Buch *Suan Jing* des Sun Tzu ist der berühmte chinesische Restsatz enthalten, dem ein eigenes Unterkapitel gewidmet ist. Daneben entwickelten die Chinesen auch wichtige Methoden, wie matrizenähnliche Umformungen auf dem Rechenbrett, Lösung von höheren Gleichungen mittels Horner-Schema und die doppelte *Regula Falsi.*

Kap. 3 thematisiert die indische Mathematik, der wir unsere Zahlschreibweise verdanken, ebenso die älteste Darstellung der Null (nach dem jetzigen Erkenntnisstand) und die Einführung der negativen Zahlen. In der Geometrie führten die Inder statt dem Bogen den Sinus eines Winkels ein und fanden die Flächenformel für das Sehnenviereck. Die größten Leistungen lagen auf dem Gebiet der Zahlentheorie; die Lösungsmethoden der quadratischen diophantischen Gleichungen wurden in Europa erst Jahrhunderte später wiederentdeckt.

Kap. 4 behandelt die islamische Mathematik. Es schildert die Expansion des Islam, die in historischer Zeit zweimal Europa massiv bedroht hat. Neue Gesichtspunkte werden bei der Chronologie des frühen Islams besprochen, die historisch nicht gesichert ist. Die islamischen Mathematiker stammten aus allen eroberten Ländern wie Arabien, Syrien, Ägypten, Persien und Choresmien und brachten vielfältige Erkenntnisse ihrer Territorien ein. Etwa ab 800 waren die wichtigsten griechischen Mathematikskripten übersetzt. Die Geometrie der Griechen wurde fortgesetzt (Ablösung der Zirkel-Lineal-Konstruktionen nach Euklid, Kegelschnitte) und kubische Gleichungen mittels geometrischen Methoden gelöst. Die Algebra al-Khwārizmīs ließ die ersten Fachwörter der Algebra entstehen (Zahl, Quadrat, Kubus, Wurzel). Große Fortschritte machte die Trigonometrie (Richtungsbestimmung nach Mekka) und die Numerik (Ziehen der fünften Wurzeln, numerisches Lösen von Polynomgleichungen).

Kap. 5 befasst sich mit der Mathematik in Byzanz. Die Hauptstadt des Oströmischen Reiches spielt eine große Rolle bei der Bewahrung der alten Schriften und bei der Vermittlung nach Bagdad. Maximos Planudes sammelte hier außer den Handschriften Diophantos' auch das Manuskript der *Anthologia Graeca,* der ältesten Aufgabensammlung des Abendlands überhaupt, was nicht alle Forscher anerkennen. Ferner stammen zwei bedeutende Rechenbücher des 14. und 15. Jahrhunderts aus Byzanz. Die europäische Geschichte von Byzanz endet mit der islamischen Eroberung von 1453.

Kap. 6 ist der Klostermathematik gewidmet. Lange Zeit waren die Dom- und Klosterschulen die einzigen höheren Ausbildungsstätten; es wurde daher nur so viel Mathematik gelehrt wie für kirchliche Zwecke nötig war. Dennoch gab es Mönche bzw. ehemalige Geistliche, die Mathematik in größerem Rahmen betrieben. Um die Ausbildung der Mönche kümmerte sich im Auftrag Karls des Großen der Mönch Alkuin. Lange Zeit schrieb man ihm die Aufgabensammlung *Propositiones* zu. Gute Kontakte zum Vorläufer der Universität Wien hatte der Benediktinermönch Amann, der im Regensburger Klosters St. Emmeram eine bedeutsame Aufgabensammlung verfasste, *Practica* des Algorismus Ratisbonensis genannt. Der Abt des Benediktiner-Klosters in Stade schrieb mitten in seine Weltchronik *(Annales Stadenses)* einige mathematische Aufgaben hinein. Auf die mathematischen Schriften des Nikolaus von Kues, genannt Cusanus, konnte hier aus Umfangsgründen nicht eingegangen werden.

Kap. 7 schildert die Entwicklung der italienischen Mathematik bis zur Renaissance. Hier wird das Leben und Werk Leonardos von Pisa als ersten europäischen Mathematikers von Rang exemplarisch gewürdigt; der Name *Fibonacci* ist nicht historisch. Der stärker werdende Handel im Mittelmeerraum und das Aufblühen der Städte Genua, Florenz und Venedig machten eine Ausbildung des kaufmännischen Nachwuchses notwendig. Die Einrichtung von Rechenschulen wurde von Italien im deutschen Sprachraum, dann in ganz Europa (nördlich der Alpen) übernommen. Obwohl der Buchdruck nicht in Italien erfunden wurde, erfolgte dort der erste Druck eines Mathematikbuchs. Einige wichtige italienische Rechenbücher werden beispielhaft besprochen. Der Höhepunkt der italienischen Algebra brachte die Lösung der kubischen und quartischen Gleichung durch Tartaglia und seine Zeitgenossen. Kunstgeschichtlich bedeutsam war auch die Entdeckung der Perspektive in Italien, diese verdient eine eigene Darstellung.

Kap. 8 versammelt drei westeuropäische, lateinisch schreibende Autoren, darunter auch Jordanus Nemorarius, von dem man nun weiß, dass er nicht identisch mit dem Dominikanergeneral Jordanus von Sachsen war. Nicolas Oresme summierte bereits unendliche Reihen, seine Darstellung physikalischer Änderung mithilfe von Flächen weist schon auf künftige Koordinatensysteme und den Beginn der Integralrechnung hin. Chuquet leistete einen bedeutenden französischen Beitrag zur Algebra etwa 120 Jahre vor Vieta.

Kap. 9 zeigt die Entwicklung der Mathematik im deutschsprachigen Raum auf. Die ältesten Rechenbücher entstanden im Bamberger Raum, das erste noch im Blockdruck. Nach italienischem Vorbild werden die ersten Coß-Handschriften verfasst, die sich zum Lösen von quadratischen Gleichungen der algebraischen Umformung und nicht der