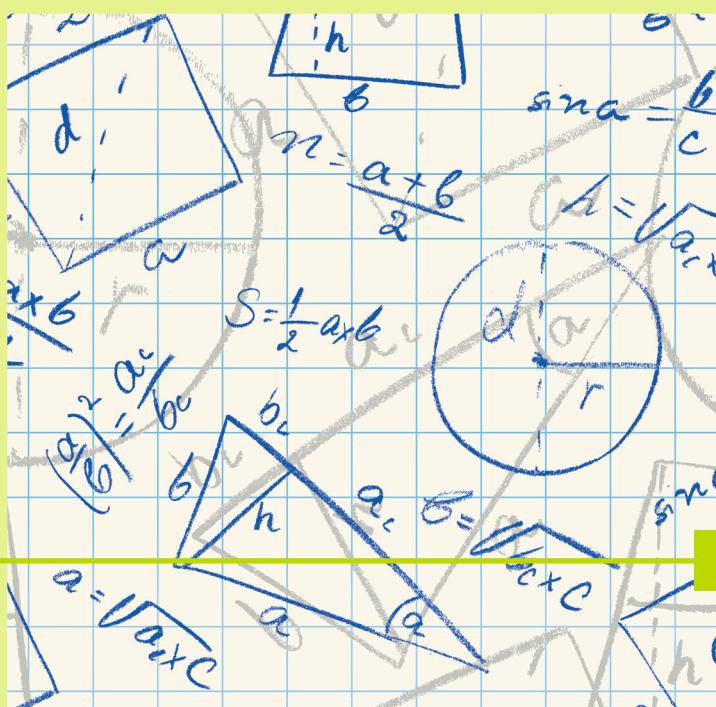


Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik

für das Ingenieurstudium



4., aktualisierte Auflage

HANSER

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik für das Ingenieurstudium

4., aktualisierte Auflage

Mit 637 Abbildungen, 507 durchgerechneten Beispielen und 384 Aufgaben
mit ausführlichen Lösungen im Internet unter www.mathematik-fuer-ingenieure.de

HANSER

Prof. Dr. rer. nat. Jürgen Koch

Hochschule Esslingen, Fakultät Grundlagen

www.hs-esslingen.de/mitarbeiter/Juergen.Koch, juergen.koch@hs-esslingen.de

Prof. Dr. rer. nat. Martin Stämpfle

Hochschule Esslingen, Fakultät Grundlagen

www.hs-esslingen.de/mitarbeiter/Martin.Staempfle, martin.staempfle@hs-esslingen.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-45166-7

E-Book-ISBN 978-3-446-45581-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2018 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Mirja Werner

Herstellung: Katrin Wulst

Satz: Jürgen Koch, Martin Stämpfle, Esslingen

Coverrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Bindung: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza

Printed in Germany

Vorwort

Drei wesentliche Gründe haben uns bewogen, ein Mathematikbuch zu schreiben. Zum einen haben wir unser persönliches didaktisches Konzept umgesetzt. Zum anderen ist dieses Buch so gestaltet, dass es dem Wandel, der durch den Einsatz von Computern entstanden ist, gerecht wird. Schließlich wird durch viele Anwendungsbeispiele die Bedeutung der Mathematik in der Technik sichtbar.

In diesem Mathematikbuch haben wir viel Wert auf eine verständliche Sprache gelegt. Begriffe, Regeln und Sätze sind so formuliert, dass sie möglichst leicht zu lesen, schnell aufzufassen und einfach zu merken sind. Bilder sagen mehr als tausend Worte. Gemäß diesem Grundsatz werden Sätze, Regeln und Beispiele mit farbigen Skizzen illustriert. Diese Abbildungen helfen, den Sachverhalt unmittelbar visuell aufzunehmen. Alle Beispiele enthalten einen ausführlichen Rechenweg. Durch die Angabe von vielen Zwischenschritten sind sie auf das Niveau von Studienanfängern zugeschnitten. Dieses Buch ist nicht nach dem strengen Prinzip Definition-Satz-Beweis aufgebaut. In diesem Sinne ist es kein Mathematikbuch für Mathematiker. Trotzdem sind an vielen Stellen Herleitungen oder Beweisskizzen enthalten. Sie fördern das Verständnis über die Zusammenhänge des mathematischen Gedankengebäudes. Querbezüge zur Geschichte der Mathematik verdeutlichen, wie sich die Mathematik über Jahrhunderte aus Ideen genialer Personen entwickelt hat. Kurzporträts einiger bedeutender Mathematiker befinden sich im Anhang.

Durch den Einsatz von Computern hat sich die Tätigkeit von Ingenieuren stark gewandelt. Berechnungen und Konstruktionen werden überwiegend mit Softwarewerkzeugen durchgeführt. Dadurch steht die Vermittlung von Rechenschemata und Rechentricks bei der Mathematikausbildung in einem Ingenieurstudium heute nicht mehr im Vordergrund. Computer machen Mathematik aber nicht überflüssig, im Gegenteil: Das Kapital der Ingenieurabsolventen liegt im Verständnis der Mathematik. Das Wissen über die Modellierung und die Kenntnis unterschiedlicher Berechnungsverfahren sowie die Fähigkeit zu einer souveränen Interpretation der Ergebnisse zeichnen einen guten Ingenieur aus. Dieses Buch wird diesem geänderten Anspruch gerecht. Die meisten Kapitel enthalten einen Abschnitt über numerische Verfahren und einen Abschnitt über ausgewählte Anwendungen. Bei diesen Anwendungen sind die technischen Skizzen und Bezeichnungen teilweise vereinfacht dargestellt und deshalb nicht immer normgerecht.

Zum Überprüfen des Lernfortschrittes stehen am Ende der Kapitel Aufgaben, unterteilt in die Kategorien Verständnis, Rechentechnik und Anwendungen, zur Verfügung. Durch selbstständiges Üben und mit einer gesunden Portion Hartnäckigkeit beim Bearbeiten der Aufgaben wird sich der gewünschte Studienerfolg einstellen. Lösungen zu den Aufgaben sind über die Internetseiten der Autoren abrufbar: www.mathematik-fuer-ingenieure.de. Das Dozentenportal des Carl Hanser Verlags stellt für Mathematikdozenten begleitend zum Buch einen Foliensatz bereit.

Unser Dank richtet sich in erster Linie an unsere Studierenden. Ihre Fragen und Bemerkungen über viele Semester hinweg haben uns angeregt, immer wieder über Verbesserungen der Darstellung des Stoffes zu reflektieren. Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei unseren Kolleginnen und Kollegen der Fakultät Grundlagen an der Hochschule Esslingen. Zahlreiche Hinweise sind an vielen Stellen eingeflossen. Ein herzlicher Dank geht an den Carl Hanser Verlag, speziell an Frau Christine Fritzscht, Frau Renate Roßbach und Frau Katrin Wulst, für die angenehme Zusammenarbeit bei der Entstehung dieses Buches. Schließlich gilt ein besonderer Dank unseren Familien, die uns Freiräume geschaffen und so die Entstehung des Manuskripts ermöglicht haben.

Esslingen, im Juli 2010

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Die positive Resonanz über unser Buch hat uns sehr gefreut und uns dazu motiviert, in die 2. Auflage eine Reihe von Ergänzungen und Verbesserungen aufzunehmen. Bedanken möchten wir uns bei den Studierenden und Kollegen über die Rückmeldungen zu Tippfehlern und kleinen Unstimmigkeiten. In akribischer Kleinarbeit sind wir allen Hinweisen nachgegangen und haben entsprechende Korrekturen vorgenommen. Auch die Lösungen zu den Aufgaben, die nach wie vor im Internet abrufbar sind, haben wir überarbeitet.

Wir haben in der 3. Auflage das Thema Funktionen in drei Kapitel aufgeteilt. Der Einstieg in die Funktionen ist nun etwas allgemeiner gehalten und beinhaltet auch Relationen. Ein eigenes klar strukturiertes Kapitel über die elementaren Funktionen verbessert den Überblick über diese Funktionen. Die zentralen Themen Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit sind nun in einem separaten Kapitel gebündelt. Mit Ergänzungen bei der z -Transformation und den beiden komplett neuen Kapiteln über Differenzengleichungen und elementare Zahlentheorie haben wir weitere Aspekte der diskreten Mathematik hinzugefügt. Einige Aufgaben und Lösungen sind neu hinzugekommen oder wurden überarbeitet.

In der 4. Auflage haben wir Abschnitte über orthogonale Vektoren und Matrizen und die Hauptachsentransformation aufgenommen. Das Kapitel über Zahlentheorie wurde um zwei Anwendungen erweitert. Bei den Kapiteln über Grundlagen, Matrizen und gewöhnliche Differenzialgleichungen wurden etliche Aufgaben ergänzt. Auch für diese Auflage haben wir noch einige kleinere Unstimmigkeiten geglättet.

Esslingen, im Oktober 2017

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	19
1.1	Logik und Mengen	19
1.1.1	Aussagenlogik	19
1.1.2	Mengen	22
1.2	Zahlen	25
1.2.1	Natürliche Zahlen	25
1.2.2	Ganze Zahlen	26
1.2.3	Rationale Zahlen	27
1.2.4	Reelle Zahlen	28
1.2.5	Ordnung	30
1.2.6	Intervalle	31
1.2.7	Betrag und Signum	32
1.2.8	Summe und Produkt	35
1.3	Potenz und Wurzel	36
1.3.1	Potenzen	36
1.3.2	Potenzgesetze	37
1.3.3	Wurzeln	37
1.3.4	Binomischer Satz	38
1.4	Trigonometrie	40
1.4.1	Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	40
1.4.2	Winkel im Grad- und Bogenmaß	42
1.4.3	Sinus- und Kosinussatz	43
1.5	Gleichungen und Ungleichungen	44
1.5.1	Lineare Gleichungen	45
1.5.2	Potenzgleichungen	46
1.5.3	Quadratische Gleichungen	46
1.5.4	Wurzelgleichungen	48
1.5.5	Ungleichungen	49
1.6	Beweise	51
1.6.1	Direkter Beweis	52
1.6.2	Indirekter Beweis	52
1.6.3	Konstruktiver Beweis	53
1.6.4	Vollständige Induktion	54
1.7	Aufgaben	56
2	Lineare Gleichungssysteme	61
2.1	Einführung	61

2.2	Gauß-Algorithmus	63
2.2.1	Äquivalenzumformungen	64
2.2.2	Vorwärtselemination	65
2.2.3	Rückwärtseinsetzen	66
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren	67
2.2.5	Rechenschema	68
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme	70
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung	70
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	71
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen	72
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	73
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	74
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme	75
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	77
2.4	Numerische Verfahren	79
2.4.1	Jacobi-Iteration	79
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration	80
2.5	Anwendungen	81
2.5.1	Produktion	81
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik	82
2.6	Aufgaben	83
3	Vektoren	85
3.1	Der Begriff eines Vektors	85
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten	87
3.2.1	Addition und Subtraktion	87
3.2.2	Skalare Multiplikation	89
3.2.3	Skalarprodukt	90
3.2.4	Vektorprodukt	94
3.2.5	Spatprodukt	96
3.2.6	Lineare Unabhängigkeit	98
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung	102
3.3.1	Koordinatendarstellung	103
3.3.2	Addition und Subtraktion	104
3.3.3	Skalare Multiplikation	105
3.3.4	Skalarprodukt	105
3.3.5	Vektorprodukt	107
3.3.6	Spatprodukt	109
3.3.7	Lineare Unabhängigkeit	109
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen	112
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem	112
3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen	114
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen	116
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen	117
3.4.5	Abstände	119

3.4.6	Winkel	122
3.5	Anwendungen	124
3.5.1	Kraft	124
3.5.2	Arbeit	124
3.5.3	Drehmoment	125
3.6	Aufgaben	126
4	Matrizen	131
4.1	Der Begriff einer Matrix	131
4.2	Rechnen mit Matrizen	135
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	136
4.2.2	Multiplikation von Matrizen	137
4.3	Determinanten	143
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix	143
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix	145
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix	149
4.4	Inverse Matrix	152
4.4.1	Invertierbare Matrizen	153
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix	154
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem	155
4.4.4	Orthogonale Matrizen	155
4.5	Lineare Abbildungen	156
4.5.1	Matrizen als Abbildungen	156
4.5.2	Koordinatentransformation	158
4.5.3	Kern, Bild und Rang	159
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	160
4.7	Numerische Verfahren	166
4.8	Anwendungen	167
4.9	Aufgaben	169
5	Funktionen	173
5.1	Relationen und Funktionen	173
5.1.1	Relationen	173
5.1.2	Funktionen	174
5.2	Reelle Funktionen	176
5.2.1	Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge	176
5.2.2	Wertetabelle und Schaubild	178
5.2.3	Explizite und implizite Darstellung	180
5.2.4	Abschnittsweise definierte Funktionen	181
5.2.5	Funktionsschar	183
5.2.6	Verkettung von Funktionen	184
5.3	Eigenschaften	187
5.3.1	Symmetrie	188
5.3.2	Periode	191
5.3.3	Monotonie	192
5.3.4	Beschränktheit	193

5.4	Das Prinzip der Umkehrfunktion	194
5.5	Anwendungen	197
5.5.1	Messwerte	197
5.5.2	Kennfelder	198
5.6	Aufgaben	199
6	Elementare Funktionen	201
6.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	201
6.1.1	Potenzfunktionen	201
6.1.2	Wurzelfunktionen	203
6.2	Polynome und gebrochenrationale Funktionen	204
6.2.1	Polynome	204
6.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	212
6.3	Sinus, Kosinus, Tangens und Arkusfunktionen	220
6.3.1	Definition am Einheitskreis	220
6.3.2	Eigenschaften	221
6.3.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	224
6.3.4	Arkusfunktionen	226
6.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	231
6.4.1	Exponentialfunktionen	231
6.4.2	Die e-Funktion	232
6.4.3	Logarithmusfunktionen	234
6.5	Hyperbel- und Areafunktionen	237
6.5.1	Hyperbelfunktionen	237
6.5.2	Areafunktionen	239
6.6	Anwendungen	240
6.6.1	Freileitungen	240
6.6.2	Industrieroboter	241
6.7	Aufgaben	242
7	Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit	245
7.1	Folgen	245
7.1.1	Zahlenfolgen	245
7.1.2	Grenzwert einer Folge	249
7.2	Funktionsgrenzwerte	253
7.3	Stetigkeit	255
7.4	Asymptotisches Verhalten	260
7.5	Numerische Verfahren	264
7.5.1	Berechnung von Funktionswerten	265
7.5.2	Bisektionsverfahren	266
7.6	Anwendungen	268
7.7	Aufgaben	269
8	Differenzialrechnung	271
8.1	Steigung und Ableitungsfunktion	271
8.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit	271

8.1.2	Differenzial	275
8.1.3	Ableitungsfunktion	275
8.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	279
8.1.5	Höhere Ableitungen	280
8.2	Ableitungstechnik	281
8.2.1	Ableitungsregeln	281
8.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	286
8.2.3	Logarithmisches Differenzieren	288
8.2.4	Implizites Differenzieren	289
8.2.5	Zusammenfassung	290
8.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	291
8.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen	295
8.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel	295
8.4.2	Monotonie	297
8.4.3	Krümmung	298
8.4.4	Lokale Extrema	299
8.4.5	Wendepunkte	303
8.4.6	Globale Extrema	304
8.5	Numerische Verfahren	305
8.5.1	Numerische Differenziation	306
8.5.2	Newton-Verfahren	307
8.5.3	Sekantenverfahren	309
8.6	Anwendungen	310
8.6.1	Fehlerrechnung	310
8.6.2	Extremwertaufgaben	312
8.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	314
8.7	Aufgaben	315
9	Integralrechnung	321
9.1	Flächenproblem	321
9.1.1	Integralsymbol	321
9.1.2	Integral als Grenzwert von Summen	322
9.1.3	Bestimmtes Integral	324
9.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral	325
9.2.1	Integralfunktion	325
9.2.2	Stammfunktion	327
9.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	329
9.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	330
9.3	Integrationstechnik	332
9.3.1	Integrationsregeln	332
9.3.2	Integration durch Substitution	336
9.3.3	Partielle Integration	343
9.3.4	Gebrochenrationale Funktionen	345
9.3.5	Uneigentliche Integrale	348

9.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen	351
9.4.1	Flächeninhalte	351
9.4.2	Bogenlänge	353
9.4.3	Rotationskörper	355
9.5	Numerische Verfahren	359
9.5.1	Trapezregel	360
9.5.2	Romberg-Verfahren	362
9.6	Anwendungen	362
9.6.1	Effektivwert	362
9.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen	363
9.7	Aufgaben	367
10	Potenzreihen	371
10.1	Unendliche Reihen	372
10.2	Potenzreihen und Konvergenz	376
10.3	Taylor-Reihen	377
10.4	Eigenschaften	379
10.5	Numerische Verfahren	385
10.6	Anwendungen	386
10.7	Aufgaben	387
11	Kurven	389
11.1	Parameterdarstellung	389
11.2	Kegelschnitte	392
11.3	Tangente	398
11.4	Krümmung	400
11.5	Bogenlänge	403
11.6	Numerische Verfahren	405
11.7	Anwendungen	407
11.7.1	Mechanik	407
11.7.2	Straßenbau	408
11.8	Aufgaben	410
12	Funktionen mit mehreren Variablen	413
12.1	Definition und Darstellung	413
12.1.1	Definition einer Funktion mit mehreren Variablen	413
12.1.2	Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen	414
12.1.3	Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien	414
12.2	Grenzwert und Stetigkeit	418
12.2.1	Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen	418
12.2.2	Stetigkeit	419
12.3	Differenziation	420
12.3.1	Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit	420
12.3.2	Differenzierbarkeit und Tangentialebene	423
12.3.3	Gradient und Richtungsableitung	425
12.3.4	Differenzial	428

12.3.5	Höhere partielle Ableitungen	431
12.3.6	Extremwerte	433
12.4	Ausgleichsrechnung	435
12.4.1	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	435
12.4.2	Ausgleichsrechnung mit Polynomen	436
12.4.3	Lineare Ausgleichsrechnung	440
12.5	Vektorwertige Funktionen	442
12.6	Numerische Verfahren	443
12.6.1	Mehrdimensionales Newton-Verfahren	443
12.6.2	Gradientenverfahren	445
12.7	Anwendungen	447
12.8	Aufgaben	449
13	Komplexe Zahlen und Funktionen	451
13.1	Definition und Darstellung	451
13.1.1	Komplexe Zahlen	451
13.1.2	Gaußsche Zahlenebene	452
13.1.3	Polarkoordinaten	453
13.1.4	Exponentialform	455
13.2	Rechenregeln	457
13.2.1	Gleichheit	457
13.2.2	Addition und Subtraktion	457
13.2.3	Multiplikation und Division	458
13.2.4	Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	460
13.2.5	Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl	460
13.3	Potenzen, Wurzeln und Polynome	462
13.3.1	Potenzen	463
13.3.2	Wurzeln	463
13.3.3	Fundamentalsatz der Algebra	466
13.4	Komplexe Funktionen	468
13.4.1	Ortskurven	469
13.4.2	Harmonische Schwingungen	470
13.4.3	Transformationen	474
13.5	Anwendungen	478
13.6	Aufgaben	479
14	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	481
14.1	Einführung	481
14.1.1	Grundbegriffe	481
14.1.2	Anfangswert- und Randwertproblem	484
14.1.3	Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie	486
14.1.4	Differenzialgleichung und Funktionenschar	488
14.2	Differenzialgleichungen erster Ordnung	489
14.2.1	Separation der Variablen	490
14.2.2	Lineare Substitution	492
14.2.3	Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen	493

14.3	Lineare Differenzialgleichungen	494
14.3.1	Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	494
14.3.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	497
14.3.3	Allgemeine Eigenschaften	501
14.3.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	504
14.4	Schwingungsdifferenzialgleichungen	517
14.4.1	Allgemeine Form	517
14.4.2	Freie Schwingung	518
14.4.3	Harmonisch angeregte Schwingung	520
14.4.4	Frequenzgänge	524
14.5	Differenzialgleichungssysteme	526
14.5.1	Eliminationsverfahren	526
14.5.2	Zustandsvariablen	528
14.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	530
14.5.4	Lineare Differenzialgleichung als System	536
14.5.5	Stabilität	538
14.6	Numerische Verfahren	542
14.6.1	Polygonzugverfahren von Euler	542
14.6.2	Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme	544
14.7	Anwendungen	545
14.7.1	Temperaturverlauf	545
14.7.2	Radioaktiver Zerfall	545
14.7.3	Freier Fall mit Luftwiderstand	546
14.7.4	Feder-Masse-Schwinger	547
14.7.5	Pendel	548
14.7.6	Wechselstromkreise	548
14.8	Aufgaben	551
15	Differenzengleichungen	557
15.1	Lineare Differenzengleichungen	557
15.1.1	Differenzengleichungen erster Ordnung	559
15.1.2	Differenzengleichungen höherer Ordnung	561
15.2	Systeme linearer Differenzengleichungen	565
15.2.1	Homogene Systeme erster Ordnung	566
15.2.2	Inhomogene Systeme erster Ordnung	568
15.2.3	Asymptotisches Verhalten	569
15.3	Anwendungen	571
15.4	Aufgaben	572
16	Fourier-Reihen	573
16.1	Fourier-Analyse	573
16.1.1	Periodische Funktionen	573
16.1.2	Trigonometrische Polynome	575
16.1.3	Fourier-Reihe	577
16.1.4	Satz von Fourier	578
16.1.5	Gibbssches Phänomen	581

16.2	Komplexe Darstellung	583
16.2.1	Komplexe Fourier-Reihe	583
16.2.2	Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten	585
16.2.3	Spektrum	587
16.2.4	Minimaleigenschaft	590
16.3	Eigenschaften	592
16.3.1	Symmetrie	592
16.3.2	Integrationsintervall	593
16.3.3	Mittelwert	594
16.3.4	Linearität	594
16.3.5	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	596
16.3.6	Zeitverschiebung	597
16.4	Aufgaben	599
17	Verallgemeinerte Funktionen	601
17.1	Heaviside-Funktion	601
17.2	Dirac-Distribution	603
17.3	Verallgemeinerte Ableitung	605
17.4	Faltung	607
17.5	Anwendungen	611
17.6	Aufgaben	612
18	Fourier-Transformation	613
18.1	Integraltransformation	613
18.1.1	Definition	613
18.1.2	Darstellung mit Real- und Imaginärteil	615
18.1.3	Sinus- und Kosinustransformation	617
18.1.4	Transformation gerader und ungerader Funktionen	618
18.1.5	Darstellung mit Amplitude und Phase	620
18.2	Eigenschaften	621
18.2.1	Linearität	622
18.2.2	Zeitverschiebung	623
18.2.3	Amplitudenmodulation	625
18.2.4	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	627
18.3	Inverse Fourier-Transformation	628
18.3.1	Definition	628
18.3.2	Vertauschungssatz	630
18.3.3	Linearität	631
18.4	Differenziation, Integration und Faltung	631
18.4.1	Differenziation im Zeitbereich	631
18.4.2	Differenziation im Frequenzbereich	633
18.4.3	Multiplikationssatz	633
18.4.4	Integration	634
18.4.5	Faltung	635
18.5	Periodische Funktionen	635
18.5.1	Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe	636

18.5.2	Koeffizienten der Fourier-Reihe	636
18.5.3	Grenzwertbetrachtung	638
18.6	Anwendungen	640
18.6.1	Lineare zeitinvariante Systeme	640
18.6.2	Tiefpassfilter	642
18.7	Aufgaben	644
19	Laplace-Transformation	647
19.1	Bildbereich	647
19.1.1	Definition	647
19.1.2	Laplace- und Fourier-Transformation	650
19.2	Eigenschaften	651
19.2.1	Linearität	651
19.2.2	Ähnlichkeit	652
19.2.3	Zeitverschiebung	653
19.2.4	Dämpfung	654
19.3	Differenziation, Integration und Faltung	655
19.3.1	Differenziation	655
19.3.2	Integration	657
19.3.3	Faltung	658
19.3.4	Grenzwerte	659
19.4	Transformation periodischer Funktionen	659
19.5	Rücktransformation	661
19.6	Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	662
19.7	Anwendungen	668
19.8	Aufgaben	671
20	z-Transformation	673
20.1	Transformation diskreter Signale	673
20.1.1	Definition	673
20.1.2	z-Transformation und Laplace-Transformation	675
20.2	Eigenschaften	676
20.2.1	Linearität	676
20.2.2	Dämpfung	677
20.2.3	Verschiebung	677
20.2.4	Vorwärtsdifferenzen	678
20.2.5	Multiplikationssatz	679
20.2.6	Diskrete Faltung	680
20.3	Lösung von Differenzengleichungen	682
20.4	Anwendungen	685
20.5	Aufgaben	687
21	Elementare Zahlentheorie	689
21.1	Teilbarkeit	689
21.2	Kongruente Zahlen	693
21.3	Primzahlen	698

21.4 Anwendungen	702
21.4.1 International Bank Account Number (IBAN)	702
21.4.2 Linearer Kongruenzgenerator für Pseudozufallszahlen	703
21.5 Aufgaben	704
A Anhang	705
A.1 Bedeutende Mathematiker	705
A.2 Trigonometrische Funktionen	724
A.3 Ableitungen	725
A.4 Ableitungsregeln	725
A.5 Integrale	726
A.6 Integralregeln	727
A.7 Potenzreihen	727
A.8 Fourier-Reihen	728
A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation	730
A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation	732
A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation	733
A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation	734
A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen	735
A.14 Eigenschaften der z-Transformationen	735
A.15 Griechisches Alphabet	736
Literaturverzeichnis	737
Sachwortverzeichnis	739

1 Grundlagen

Die Mathematik ist aus einzelnen Bausteinen aufgebaut. Neue Erkenntnisse bauen stets auf bereits Bekanntem auf. Dadurch entsteht ein immer mächtigeres Bauwerk. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns, bildlich gesprochen, mit den untersten Etagen der Mathematik. Dabei geht es vor allem um Themen der Schulmathematik. Nun gehört die Schulmathematik nicht immer zu den vorrangigen Interessensgebieten von Studierenden. Man könnte darüber nachdenken, dieses Kapitel zu überblättern. Das geht natürlich nur gut, wenn im Kartenhaus unserer Leser in den untersten Etagen nicht viele Lücken vorhanden sind. Ansonsten drohen die ganzen Bemühungen mit einstürzenden Neubauten zu enden. Auch wenn man den Eindruck hat, über ein tragbares Fundament in Mathematik zu verfügen, sollte man sich mit den Bezeichnungen für logische Operatoren, Mengen, Zahlen, Intervalle, Summen und Produkte in diesem Kapitel vertraut machen.

Die Darstellung der Themen in diesem ersten Kapitel ist sehr komprimiert. Für eine intensive Wiederholung der Schulmathematik sollte man jedoch noch weitere Bücher, die mehr Beispiele und Übungsaufgaben enthalten, in Betracht ziehen. Die wesentlichen Dinge, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden, sind jedoch alle enthalten.

1.1 Logik und Mengen

Wir gehen in diesem Abschnitt kurz auf einige Aspekte der Logik und der Mengenlehre ein. Diese beiden Teilgebiete gehören zum absoluten Fundament der Mathematik. Obwohl sie in diesem Buch nicht im Mittelpunkt stehen, werden wir doch an vielen Stellen immer wieder logische und mengentheoretische Eigenschaften anwenden.

1.1.1 Aussagenlogik

„Das ist doch logisch.“ Dieser Satz wird oft strapaziert, jedoch nicht immer geht dieser Aussage eine wirklich streng logische Herleitung eines Sachverhalts voraus. Die Mathematik bedient sich an vielen Stellen der Logik. Die Hoffnung dabei ist, dass Dinge objektiv beschrieben werden können und Aussagen und Gesetze lange Zeit Gültigkeit haben, da sie für jeden transparent und schlüssig, eben logisch herleitbar sind. Die grundlegende Denkweise der Logik wurde auch unter philosophischen Aspekten bereits in der Antike etwa von *Aristoteles* beschrieben.

Eine spezielle Art der Logik ist die Aussagenlogik. Wie die Bezeichnung schon vermuten lässt, stehen dabei Aussagen im Mittelpunkt. Es stellt sich die Frage, wie man mit

Aussagen, insbesondere natürlich mit mathematischen Aussagen umgehen kann. In der klassischen Aussagenlogik geht man davon aus, dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist. Aussagen, bei denen nicht entscheidbar ist, ob sie wahr oder falsch sind, berücksichtigen wir hier nicht. Betrachtet man nicht nur eine Aussage, sondern mehrere, dann ist interessant, wie diese Aussagen zueinander stehen. Oftmals folgt aus einer Aussage eine andere. Man kann Aussagen miteinander verknüpfen und dadurch zu weiteren Aussagen gelangen. Der formale Apparat dazu heißt Aussagenlogik. Etwas allgemeiner ist die nach dem englischen Mathematiker *George Boole* benannte und von *Giuseppe Peano* und *John Venn* maßgeblich entwickelte Boolesche Algebra. Sie kann auf die Logik und auf Mengen, wie wir sie in *Abschnitt 1.1.2* betrachten, spezialisiert werden. Zunächst definieren wir einige Operationen für Aussagen.

Definition 1.1 (Aussagenlogik)

Für die Aussagen A_1 und A_2 bezeichnet man

- ▶ die **Negation** oder das Gegenteil der Aussage A_1 mit $\neg A_1$,
- ▶ die **Und-Verknüpfung** der beiden Aussagen mit $A_1 \wedge A_2$,
- ▶ die **Oder-Verknüpfung** der beiden Aussagen mit $A_1 \vee A_2$,
- ▶ die **Implikation** der beiden Aussagen mit $A_1 \implies A_2$,
- ▶ die **Äquivalenz** der beiden Aussagen mit $A_1 \iff A_2$.

Für äquivalente Aussagen verwendet man die Sprechweise

$$A_1 \iff A_2 \quad \text{„}A_1 \text{ gilt genau dann, wenn } A_2 \text{ gilt“}$$

und für die Implikation

$$A_1 \implies A_2 \quad \text{„wenn } A_1 \text{ gilt, dann gilt auch } A_2\text{“} \quad \text{oder} \quad \text{„aus } A_1 \text{ folgt } A_2\text{“}.$$

Etwas gewöhnungsbedürftig ist die Tatsache, dass für Relationen zwischen Aussagen Folgendes zutrifft:

$$A_1 \implies A_2 \quad \text{ist gleichbedeutend mit} \quad \neg A_2 \implies \neg A_1.$$

Folgt also aus A_1 die Aussage A_2 , so ist dies äquivalent zur Tatsache, dass, wenn A_2 falsch ist, die Aussage A_1 ebenfalls nicht wahr sein kann. Dies wird beispielsweise bei der Durchführung von Widerspruchsbeweisen, siehe *Abschnitt 1.6*, angewandt. Die Oder-Verknüpfung ist kein exklusives Oder. Ist Aussage A_1 oder Aussage A_2 wahr, so können durchaus auch beide Aussagen wahr sein. Möchte man ausdrücken, dass nur genau eine Aussage wahr ist, also entweder A_1 oder A_2 , so kann man dies mithilfe der exklusiven Oder-Verknüpfung erreichen:

$$(A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_2 \wedge \neg A_1).$$

Damit wird also ausgedrückt, dass entweder A_1 wahr und A_2 falsch ist oder der umgekehrte Fall gilt.

Beispiel 1.1 (Aussagen)

- a) Um im Lotto zu gewinnen, muss man einen Lottoschein ausfüllen. Zwischen den beiden Aussagen

A_1 : Ich habe im Lotto gewonnen, A_2 : Ich habe einen Lottoschein ausgefüllt

besteht also die Implikation $A_1 \implies A_2$. Einen Lottoschein auszufüllen bezeichnet man als eine notwendige Bedingung für einen Lottogewinn. Allerdings ist das leider noch keine hinreichende Bedingung für einen Lottogewinn.

- b) Wir betrachten die beiden Aussagen

A_1 : Die Figur ist ein Dreieck, A_2 : Die Figur ist ein Polygon.

Da jedes Dreieck ein Polygon ist, gilt $A_1 \implies A_2$. Die Umkehrung muss aber nicht zutreffen. Ein Quadrat etwa ist insbesondere ein Polygon, aber eben kein Dreieck. Die beiden Aussagen sind nicht äquivalent.

- c) Bei den beiden Aussagen

$A_1 : x > 5$, $A_2 : x > -2$.

gilt $A_1 \implies A_2$, denn wenn eine Zahl größer als 5 ist, dann ist sie auch größer als -2. Die Umkehrung trifft nicht zu. Somit sind die beiden Aussagen auch nicht äquivalent.

- d) Für die Aussagen

$A_1 : x^2 = 4$, $A_2 : x = 2$, $A_3 : x = -2$

gelten die folgenden Relationen:

$A_2 \implies A_1$, $A_3 \implies A_1$, $A_1 \iff A_2 \vee A_3$.

An diesem Beispiel wird deutlich, wie die Aussagenlogik die mathematische Lösungsfindung begleitet. Nur bei Äquivalenzumformungen ist sichergestellt, dass keine Lösung verloren geht und auch kein neuer Lösungskandidat hinzu kommt. ■

Die Oder-Verknüpfung und die Und-Verknüpfung sind assoziativ und kommutativ. Man kann also beliebig Klammern setzen und auch die Reihenfolge vertauschen. Treten beide Operatoren gemischt in einem Ausdruck auf, so kann man diesen mithilfe der Regeln des Mathematikers *Augustus de Morgan* umformen.

Satz 1.1 (Regeln von de Morgan)

Für die Aussagen A_1 und A_2 gilt:

- $\neg(A_1 \wedge A_2) = \neg A_1 \vee \neg A_2$ ► $\neg(A_1 \vee A_2) = \neg A_1 \wedge \neg A_2$

Nun gibt es allerdings auch eine etwas seltsame Art von Aussagen, bei denen man auch bei näherer Betrachtung nicht so recht weiter kommt. Was ist beispielsweise davon zu halten, wenn ein Mann folgenden Satz spricht:

„Ich spreche jetzt nicht die Wahrheit.“

Wenn er die Wahrheit sagt, so stimmt seine Aussage. Darin ist aber enthalten, dass er nicht die Wahrheit spricht. Dies ist ein Widerspruch. Wenn er lügt, dann ist seine Aussage nicht wahr. Seine Behauptung, dass er nicht die Wahrheit spricht, ist falsch. Er sagt also die Wahrheit. Dies führt ebenfalls zu einem Widerspruch. Es ist folglich nicht entscheidbar, ob diese Aussage wahr ist oder nicht. Wie kommt dieses Paradoxon zustande? Es ist der Selbstbezug, der diese sogenannte Antinomie ungreifbar macht. *Bertrand Russell* publizierte 1903 dieses Paradoxon erstmals.

Als Ausblick sei hier erwähnt, dass eine Erweiterung der Aussagenlogik in der sogenannten Prädikatenlogik besteht. Dieser Formalismus enthält als weitere Strukturelemente sogenannte Prädikate und Quantoren, mit deren Hilfe Existenz und Allgemeingültigkeit von Ausdrücken näher spezifiziert werden können. Die Prädikatenlogik hat viele Anwendungsfelder. Dazu zählen Programmiersprachen und Compilerbau in der Informatik. Pioniere der modernen Logik sind *John von Neumann*, *Paul Bernays* und *Kurt Gödel*.

1.1.2 Mengen

Viele Begriffe in der Mathematik, wie beispielsweise die reellen Zahlen oder der Wertevorrat einer Funktion, werden über Mengen definiert. Eine Menge fasst verschiedene Elemente zusammen. In einer Menge können endlich viele oder unendlich viele Elemente enthalten sein. Bei einer Menge interessiert man sich nicht für die Reihenfolge der Elemente. In diesem Sinn gibt es kein erstes oder letztes Element einer Menge. Man kann lediglich entscheiden, ob ein gewisses Element in einer Menge enthalten ist oder nicht. Ein und dasselbe Element kann auch nicht mehrfach in einer Menge enthalten sein. Mengen kann man durch Aufzählen der Elemente oder durch Angabe bestimmter Eigenschaften der Elemente festlegen.

Definition 1.2 (Mengenschreibweise)

In der **aufzählenden Form** einer Menge M werden alle Elemente $a, b, c, \dots$ aufgezählt, die zu M gehören:

$$M = \{a, b, c, \dots\}.$$

In der **beschreibenden Form** einer Menge M besteht M aus allen Elementen x , die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen:

$$M = \{x \mid x \text{ hat bestimmte Eigenschaft}\}.$$

Beispiel 1.2 (Mengenschreibweise)

Die Menge, die aus allen Zahlen besteht, deren Quadrat kleiner oder gleich 4 ist und die größer oder gleich -1 sind, definiert man durch

$$M = \{x \mid x^2 \leq 4 \text{ und } x \geq -1\}.$$

Die Menge M besteht aus den Zahlen zwischen -1 und 2 . ■

Definition 1.3 (Leere Menge)

Die **leere Menge** bezeichnet man mit $\emptyset = \{\}$.

Die leere Menge enthält kein Element. Für sie verwendet man die Bezeichnung $\emptyset$. Mit den Symbolen $\in$ und $\notin$ beschreibt man das Enthaltensein von Elementen in einer Menge.

Definition 1.4 (Element einer Menge)

Die Mengenzugehörigkeit beschreibt man für

- ▶ ein **Element** einer Menge mit $a \in \{a, b, c\}$,
- ▶ kein Element einer Menge mit $d \notin \{a, b, c\}$.

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Wenn die Menge M_2 alle Elemente der Menge M_1 auch enthält, dann nennt man M_1 eine Teilmenge von M_2 . In diesem Sinne besteht auch zwischen zwei gleichen Mengen die Teilmengenrelation. An manchen Stellen unterscheidet man zwischen echten und unechten Teilmengen. Bei zwei gleichen Mengen spricht man dann von unechten Teilmengen. Echte Teilmengen müssen sich um mindestens ein Element unterscheiden.

Definition 1.5 (Teilmenge)

Die Menge M_1 ist eine **Teilmenge** der Menge M_2 , falls jedes Element x der Menge M_1 auch in der Menge M_2 enthalten ist:

$$M_1 \subset M_2 : \quad x \in M_1 \implies x \in M_2.$$

Die wichtigsten Operationen für Mengen sind Vereinigung, Schnitt und Differenz. Die Vereinigungsmenge zweier Mengen enthält alle Elemente aus den beiden Mengen. Die Schnittmenge zweier Mengen besteht aus den Elementen, die sowohl zu der einen als auch zu der anderen Menge gehören. Bei der Differenzenmenge von zwei Mengen werden alle Elemente der zweiten Menge aus der ersten Menge entfernt. Mithilfe der Aussagenlogik kann man die Mengenoperationen formal definieren.

Definition 1.6 (Mengenoperationen)

Für die Mengen M_1 und M_2 definiert man

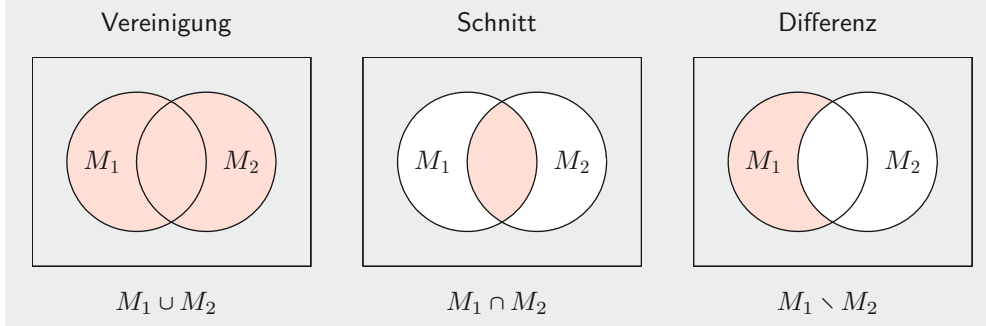
- ▶ die **Vereinigungsmenge** durch $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$,
- ▶ die **Schnittmenge** durch $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$,
- ▶ die **Differenzenmenge** durch $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$.

Während bei den ersten beiden Operationen die Mengen vertauschbar sind, ohne dass sich dabei das Ergebnis ändert, ist dies bei der Differenzbildung nicht möglich. Im Allgemeinen ist also $M_1 \setminus M_2$ nicht dasselbe wie $M_2 \setminus M_1$. Die Differenzbildung ist, wie man sagt, nicht kommutativ. Das exklusive Mengen-Oder erhält man mittels der Mengendifferenz folgendermaßen:

$$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1).$$

Deutlich sichtbar ist die Analogie zwischen der logischen Oder-Verknüpfung und der Vereinigungsmenge. Gleiches gilt für die logische Und-Verknüpfung und die Schnittmenge. Auch beim exklusiven Oder ist die Analogie zur Aussagenlogik erkennbar. Sicherlich einprägsamer und leichter zu merken sind diese Definitionen über Mengendiagramme, die man auch als Venn-Diagramme bezeichnet. Sie sind nach dem englischen Mathematiker *John Venn* benannt.

Mengenoperationen



Beispiel 1.3 (Mengenoperationen)

- a) $\{4, 7, 11\} \cup \{7, 17, 27\} = \{4, 7, 11, 17, 27\}$
- b) $\{4, 7, 11\} \cap \{7, 17, 27\} = \{7\}$
- c) $\{4, 7, 11\} \setminus \{7, 17, 27\} = \{4, 11\}$

■

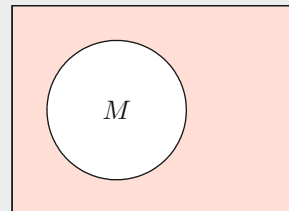
Nun gibt es noch die sogenannte Komplementbildung einer Menge M . Diese ist allerdings nur definiert, falls es eine Grundmenge gibt, aus der M gebildet ist.

Definition 1.7 (Mengenkomplement)

Bezogen auf eine Grundmenge ist das **Komplement** einer Menge definiert durch

$$M^C = \{x \mid x \notin M\}.$$

Kein Element von M ist in der Menge M^C enthalten und umgekehrt.



Viele Beiträge zu unterschiedlichen Aspekten der Mengenlehre stammen von *Bernhard Placius Johann Nepomuk Bolzano*, *Richard Dedekind*, *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor* und *Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo*.

1.2 Zahlen

Der Mathematiker *Richard Dedekind* veröffentlichte 1888 eine Publikation mit dem Titel „Was sind und was sollen Zahlen?“. Für sich betrachtet sind Zahlen rein abstrakte mathematische Objekte. Aus unserem Alltag sind Zahlen jedoch nicht mehr wegzudenken. Sie werden zum Zählen, Ordnen, Messen und zur Angabe von Größenverhältnissen verwendet. Beispielsweise hat die Zahl 11 zunächst keinen Bezug zu unserer täglichen Realität. Wenn wir jedoch wissen, dass eine Fußballmannschaft aus 11 Spielern besteht, dann ist die Größe genau festgelegt. Wenn eine Mannschaft auf dem 11-ten Tabellenplatz steht, dann verwenden wir die Zahlen zum Festlegen einer Reihenfolge.

In dieser Einführung stellen wir gewissermaßen die Entstehungsgeschichte der Zahlen vor. Sie erstreckt sich von den natürlichen und ganzen Zahlen über die rationalen Zahlen bis zu den reellen Zahlen. Die letzte Episode, die sich mit den komplexen Zahlen beschäftigt, ist in *Kapitel 13* enthalten.

1.2.1 Natürliche Zahlen

Die Zahlen

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

sind uns aus dem Alltag vertraut. Die Mathematiker bezeichnen diese Zahlen deshalb als natürliche Zahlen.

Definition 1.8 (Menge der natürlichen Zahlen)

Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird beschrieben durch

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Viel Diskussion erzeugt die Frage, ob die Null auch eine natürliche Zahl ist. Letztendlich ist es jedoch ohne Bedeutung, ob wir die Null als natürliche Zahl betrachten oder nicht. Über was wir wirklich bei dieser Schreibweise nachdenken sollten, sind die drei Punkte am Ende der Auflistung. Durch die Notation ... wird angedeutet, dass es immer weiter geht. Im Sinne der Mathematik gibt es also keine größte natürliche Zahl. Meistens argumentiert man dabei wie folgt: Angenommen es gäbe eine größte natürliche Zahl, dann kann man doch sicherlich eine Eins zu dieser Zahl addieren und erhält dadurch eine noch größere Zahl. Also ist die Annahme, dass es eine größte natürliche Zahl gibt, nicht haltbar.

Definition 1.9 (Unendlich)

In der Mathematik versteht man unter dem Begriff **Unendlichkeit** das Gegenteil von Endlichkeit. Eine Menge hat also genau dann unendlich viele Elemente, wenn die Anzahl der Elemente nicht endlich ist. Zur Bezeichnung der Unendlichkeit verwendet man das Symbol ∞ .

Beim Umgang mit dem Symbol ∞ ist Vorsicht geboten. Man darf mit diesem Symbol nicht einfach wie mit Zahlen rechnen. Wenn man Ausdrücke der Art $\infty - \infty$ verwendet, muss man genau erläutern, was darunter zu verstehen ist.

Symbole ∞ und $-\infty$

Die Bezeichnungen ∞ und $-\infty$ sind Symbole und keine Zahlen. Mit den Symbolen ∞ und $-\infty$ darf man nicht einfach rechnen wie mit Zahlen.

Ob sich die mathematische Unendlichkeit tatsächlich auf unsere reale Welt übertragen lässt, ist dem Mathematiker letztendlich egal. Nach Schätzungen von Physikern enthält unser Universum nicht mehr als 10^{78} Atome. Die Größe einer solchen Zahl mit 78 Stellen ist schwer zu erfassen, sie spielt für die mathematische Theorie keine Rolle. In der Mathematik ist das Prinzip der Unendlichkeit durch Axiome fest verankert. *Albert Einstein* soll einmal gesagt haben: „Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.“

1.2.2 Ganze Zahlen

Die Addition und die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ergibt wieder eine natürliche Zahl. Anders sieht es bei der Subtraktion aus. Wenn man von einer natürlichen Zahl eine größere natürliche Zahl abzieht, so ist das Ergebnis negativ. Das Ergebnis ist in diesem Fall also keine natürliche Zahl. Um diesen Makel zu beseitigen, erweitern wir die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.

Definition 1.10 (Menge der ganzen Zahlen)

Die **Menge der ganzen Zahlen** wird beschrieben durch

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Durch die ganzen Zahlen ist die Problematik bei der Subtraktion behoben. Die Addition, die Multiplikation und die Subtraktion zweier ganzer Zahlen ergibt wieder eine ganze Zahl. Mathematiker sprechen von der Abgeschlossenheit der ganzen Zahlen bezüglich Addition, Multiplikation und Subtraktion.

Auf den ersten Blick hat es den Anschein, dass es doppelt so viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen gibt. Bei dieser Betrachtung ist jedoch Vorsicht geboten. Sie geht von

einer Rechnung der Art „ $\infty + \infty = 2\infty$ “ aus. Wie bereits erwähnt, darf man mit dem Symbol ∞ nicht einfach so rechnen, als ob es eine Zahl wäre. Aus Sicht der Mathematik ist die Anzahl der natürlichen und der ganzen Zahlen gleich, nämlich unendlich.

1.2.3 Rationale Zahlen

Über eine Grundrechenart haben wir uns bisher noch keine Gedanken gemacht, nämlich die Division. Was passiert, wenn wir zwei ganze Zahlen durcheinander teilen? Nur in Ausnahmefällen geht die Division zweier ganzer Zahlen ohne Rest auf. Damit wir Ergebnisse von Divisionen beliebiger ganzer Zahlen darstellen können, benötigen wir eine Erweiterung der ganzen Zahlen.

Definition 1.11 (Menge der rationalen Zahlen)

Die **Menge der rationalen Zahlen** besteht aus allen Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ q = \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Im Hinblick auf die vier Grundrechenarten haben wir unser Ziel erreicht. Die rationalen Zahlen sind bezüglich Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division abgeschlossen. Beim Umgang mit rationalen Zahlen spielt die Darstellung als Dezimalzahl eine wichtige Rolle. Dabei verwenden wir anstelle eines Kommas die international übliche Schreibweise der Dezimalzahlen mit einem Dezimalpunkt.

Definition 1.12 (Dezimalzahl)

Ein Zahl der Form

$$z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0 . z_{-1} z_{-2} z_{-3} \dots, \quad z_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

bezeichnet man als **Dezimalzahl**. Sie besteht aus endlich vielen Ziffern z_k vor dem Dezimalpunkt und endlich oder unendlich vielen Ziffern z_k nach dem Dezimalpunkt.

Bei Dezimalzahlen werden die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Sie beruhen auf dem Zehnersystem. Historiker sehen die Ursache für die weite Verbreitung des Dezimalsystems vor allem in der menschlichen Anatomie. Das Zählen im Zehnersystem lässt sich durch zehn Finger einfach realisieren.

Trotzdem haben sich auch andere Zahlensysteme etabliert. Unter anderem das Zwölfersystem, das sich durch die einfache Aufteilung in Hälften, Drittel, Viertel, Sechstel und Zwölftel gegenüber dem Dezimalsystem auszeichnet. Bei der Darstellung auf Computern verwendet man das Binärsystem, das nur die beiden Ziffern 0 und 1 kennt. Eine komprimierte Darstellung des Binärsystems bietet das Hexadezimalsystem zur Basis 16.

Beispiel 1.4 (Dezimalzahlen)

- a) Die Zahl 1.4142 ist ein typisches Beispiel für eine Dezimalzahl. Sie besitzt eine Stelle vor dem Dezimalpunkt und 4 Nachkommastellen und lässt sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen:

$$1.4142 = \frac{14142}{10000}.$$

Somit ist 1.4142 auch eine rationale Zahl. Zusätzlich wird bei diesem Beispiel eine Problematik deutlich, die wir an dieser Stelle auf keinen Fall verheimlichen wollen. Die Bruchdarstellung einer rationalen Zahl ist nicht eindeutig:

$$1.4142 = \frac{14142}{10000} = \frac{7071}{5000} = \frac{28284}{20000} = \dots$$

- b) Unter den rationalen Zahlen gibt es auch Zahlen, die sich nicht als endliche Dezimalzahl darstellen lassen. Ein einfaches Beispiel ist die rationale Zahl $\frac{1}{3}$. Die Darstellung dieser Zahl ist als Dezimalzahl nur dann möglich, wenn man unendlich viele Nachkommastellen zulässt:

$$\frac{1}{3} = 0.333333\dots = 0.\overline{3}.$$

Man spricht hier von einer periodischen Dezimalzahl. Ein Strich über den sich wiederholenden Ziffern zeigt die Periode an.

- c) Durch Brüche mit dem Nenner 9, 99, 999, ... kann man aufgrund von

$$\frac{1}{9} = 0.111111\dots, \quad \frac{1}{99} = 0.010101\dots, \quad \frac{1}{999} = 0.001001\dots, \quad \dots$$

jede periodische Dezimalzahl darstellen. Dadurch sind alle periodischen Dezimalzahlen rationale Zahlen. Man kann den Trick auch bei Zahlen der Art

$$0.815471147114711\dots = 0.815\overline{4711} = \frac{815}{1000} + \frac{4711}{1000 \cdot 9999}$$

anwenden. Umgekehrt kann man die Dezimalzahl

$$0.999999\dots = 0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

auch als rationale Zahl darstellen. ■

Dezimalzahlen

Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen und jede periodische Dezimalzahl ist als Bruch darstellbar und somit eine rationale Zahl. Umgekehrt bestehen die rationalen Zahlen genau aus allen Dezimalzahlen, die endlich viele Nachkommastellen haben oder periodisch sind.

1.2.4 Reelle Zahlen

In der griechischen Antike, also vor rund 2500 Jahren, gab es den ersten Nachweis, dass es auch Zahlen gibt, die nicht rational sind. Nicht rational bedeutet, dass sich die Zahl nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt. Solche Zahlen bezeichnet man heute als

irrational. Unglücklicherweise assoziiert man umgangssprachlich mit irrational etwas, was gegen die „Ratio“, also gegen die Vernunft gerichtet ist. Der Ausdruck irrationale Zahlen bezieht sich jedoch auf den Begriff „Ratio“ im Sinne vom Verhältnis zweier Zahlen.

Definition 1.13 (Irrationale Zahlen)

Eine Zahl, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, bezeichnet man als **irrationale Zahl**. Irrationale Zahlen besitzen eine Dezimaldarstellung mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen.

Beispiel 1.5 (Irrationale Zahlen)

- a) Ein typischer Vertreter der irrationalen Zahlen ist

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097 \dots$$

Zum Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist *Euklid* indirekt vorgegangen, siehe *Beispiel 1.25*.

- b) Leonhard Euler konnte im Jahr 1737 beweisen, dass die Zahl

$$e = 2.7182818284590455348848081484903 \dots$$

auch irrational ist. Weitere Einzelheiten zur Eulerschen Zahl e findet man in *Definition 7.9*.

- c) Auch von der Kreiszahl

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795 \dots$$

ist bekannt, dass sie irrational ist. Die Kreiszahl π spielt eine zentrale Rolle bei den trigonometrischen Funktionen, siehe *Definition 1.28*. ■

Definition 1.14 (Reelle Zahlen)

Die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ besteht aus allen rationalen und irrationalen Zahlen.

Die Beweise, dass die Zahlen e und π irrational sind, sind alles andere als einfach. *Charles Hermite* etwa hat gezeigt, dass e eine sogenannte transzendente Zahl ist. Daraus folgt insbesondere, dass e irrational ist. Es entsteht leicht der Eindruck, dass man irrationale Zahlen wie Stecknadeln im Heuhaufen suchen muss. Doch genau das Gegenteil ist richtig. Es gibt wesentlich mehr irrationale Zahlen als rationale Zahlen. Formal drückt man das in der Mathematik dadurch aus, dass die rationalen Zahlen als abzählbar und die irrationalen Zahlen als überabzählbar bezeichnet werden. Anschaulich kann man sich das folgendermaßen vorstellen: Angenommen, man hätte einen Sack, indem sich alle rationalen und irrationalen Zahlen befinden. Wenn man nun blind eine Zahl aus diesem Sack ziehen würde, dann kann man fast sicher sein, dass es eine irrationale Zahl ist.

Einbettung der Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen sind eine echte Teilmenge der ganzen Zahlen, die ganzen Zahlen sind eine echte Teilmenge der rationalen Zahlen und die rationalen Zahlen sind eine echte Teilmenge der reellen Zahlen : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.