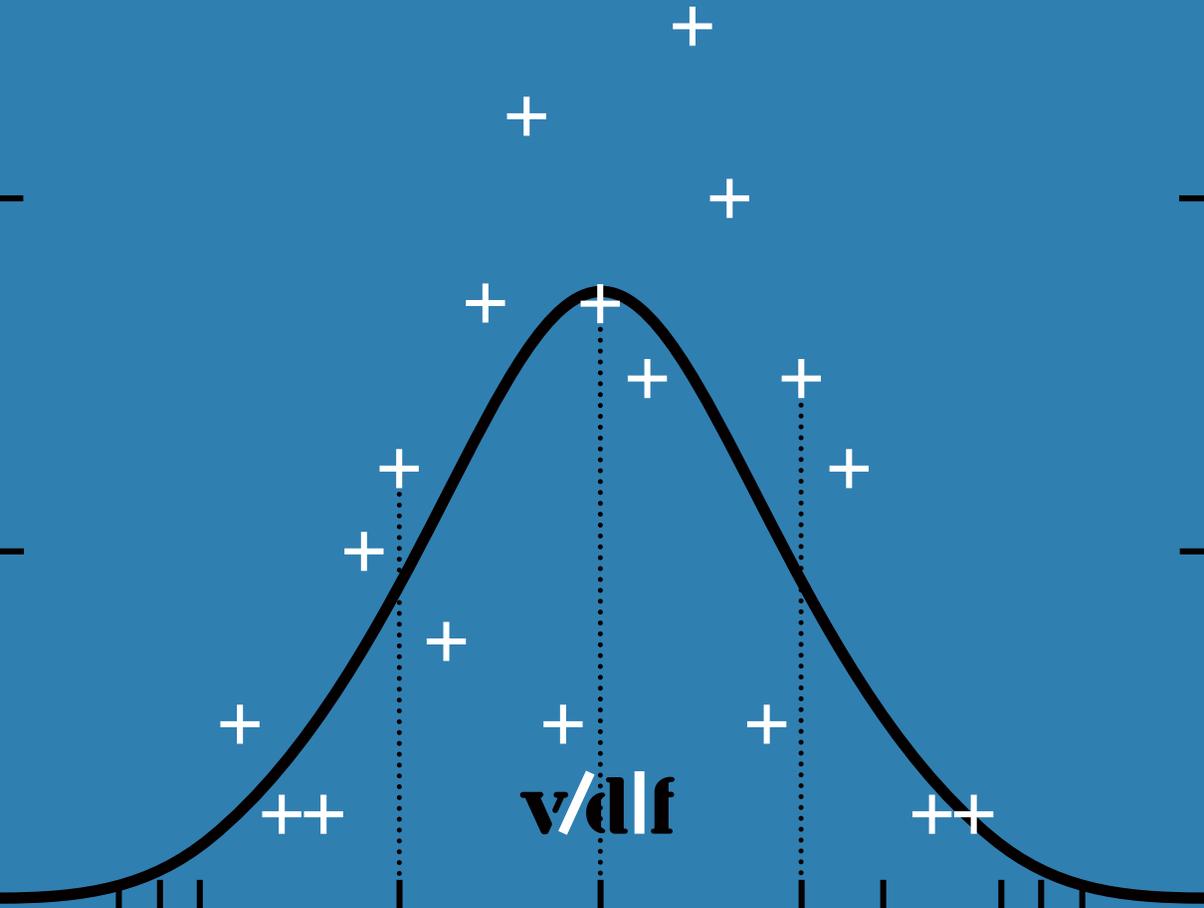


W.H. Heini Gränicher

Messung beendet – was nun?

Einführung und Nachschlagewerk
für die Planung und Auswertung
von Messungen



Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Gränicher, Heini:

Messung beendet – was nun?: Einführung und Nachschlagewerk für die Planung und Auswertung von Messungen / W.H. Heini Gränicher. – 2., überarb. Aufl. – Zürich: vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich
ISBN 978-3-7281-3314-4 (eBook)

Das Werk einschliesslich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ausserhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung der Verlage unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für die Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

2, überarbeitete Auflage 1996

©1994

vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

Vorwort

Messfehler, ihre Grösse, Mittelwerte, Streuung und Verteilung lernt der Student während seines Praktikums kennen und berechnen. Spätestens jedoch bei der ersten selbständigen experimentellen Arbeit erkennt er die Beschränktheit seiner Kenntnisse und die Notwendigkeit, sein Wissen zu erweitern und zu vertiefen. Später wird er die Bedeutung der Korrelation und Ausgleichsrechnung für gewisse seiner Resultate als entscheidend betrachten. Aus diesem Grunde hat Professor W. H. Heini Gränicher während Jahren an der ETH Zürich eine beachtete Vorlesung über das Gebiet der Messfehler gehalten. Mit dem neu vorliegenden Buch «Messung beendet — was nun?» hat er diese Tätigkeit bis ins Detail zur Darstellung gebracht. Es ist nicht von ungefähr, dass Professor Gränicher sich dieser Aufgabe mit Freude und Eifer widmete. Der Unterzeichnete kennt ihn seit bald vierzig Jahren und weiss, wie viel ihm als Physiker und Planer an Genauigkeit und Gewissenhaftigkeit liegt. Das Werk ist klar geschrieben und auch für den gestandenen Praktiker in Ingenieur- oder Naturwissenschaften als Nachschlagewerk sehr geeignet. Man kann ja nicht immer alles präsent haben, etwa die einfache Frage: «Was beinhaltet das dritte Moment einer Verteilung?» In diesem Sinne begleiten dieses Buch meine besten Wünsche.

Hedingen, Sommer 1994

K. Alex Müller

(Nobelpreisträger für Physik, 1987)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einleitung (Inhaltsübersicht und Terminologie)	1 –
Kapitel 2: Systematische Fehler und ihre Fortpflanzung	2 –
2.1 Einleitung	1
2.2 Arten systematischer Fehler	1
2.2.1 Umwelteinflüsse	1
2.2.2 Unvollkommenheit der Messgeräte	2
2.2.3 Unzulänglichkeiten von Seiten des Experimentators	3
2.3 Entdeckung und Vermeidung systematischer Fehler	4
2.3.1 Überprüfung der Theorie	4
2.3.2 Veränderung der Messbedingungen	4
2.3.3 Wahl einer grundsätzlich anderen Messmethode	5
2.3.4 Messmethoden, welche systematische Fehler ausschliessen	6
2.3.5 Korrekturen für erkannte systematische Fehler	6
2.4 Fortpflanzung systematischer Fehler	7
2.5 Schlussbetrachtung	10
Kapitel 3: Zufällige Fehler	3 –
3.1 Einleitung	1
3.2 Häufigkeitsverteilung und Verteilungsfunktion	2
3.3 Grundgesamtheit und Stichprobe	3
3.4 Kennzeichnung von Verteilungen: Lagegrössen	5
3.5 Kennzeichnung von Verteilungen: Dispersionsgrössen	8
3.6 Mittlerer Fehler (Standardabweichung) und Varianz einer Stichprobe	9
3.7 Mittlerer Fehler (Standardabweichung) eines Mittelwertes	11
3.8 Kennzeichnung einer Verteilung durch ihre Momente	14
3.9 Fehlerfortpflanzung von Zufallsmessfehlern	16
3.10 Genauigkeit des mittleren Fehlers (Standardabweichung)	21
3.11 Schlussbemerkung	22
Kapitel 4: Modellverteilungen der Statistik	4 –
4.1 Einleitung	1
4.2 Binomial- oder Bernoulli-Verteilung	1
4.3 Normalverteilung, auch Gauss-Verteilung genannt	5
4.4 Poisson-Verteilung	12
4.5 Intervallverteilung und Exponentialverteilung	16
4.6 Lorentz-Verteilung, auch Cauchy-Verteilung genannt	19
4.7 Abschliessende Bemerkungen zu Verteilungsfunktionen	21
4.8 Hinweise zu Tabellen von Verteilungsfunktionen	22

Kapitel 5: Statistische Tests	5 –
5.1 Problemstellung	1
5.2 Elementare Tests	1
5.3 Graphische Methoden	2
5.4 t -Test für die Konsistenz zweier Mittelwerte	4
5.5 F -Test zur Prüfung von Varianzen	8
5.6 Chi-Quadrat-Test	9
5.7 Schlussbemerkungen über statistische Tests	11
Kapitel 6: Ausgleichsrechnung	6 –
6.1 Einleitung	1
6.2 Ausgleichung einer einzigen fehlerbehafteten Grösse	2
6.2.1 Der gewogene Mittelwert	2
6.2.2 Der mittlere Fehler des gewogenen Mittelwerts	4
6.3 Ausgleichung bei funktionalen Zusammenhängen	9
6.3.1 Einführung	9
6.3.2 Graphischer Ausgleich	10
6.3.3 Darstellung als lineare Beziehung	11
6.3.4 Lineare Beziehung mit gleichen Gewichten	14
6.3.5 Richtige Wahl der Fehlergleichung	17
6.3.6 Lineare Beziehung mit unterschiedlichen Gewichten	20
6.3.7 Allgemeine Beziehung	21
6.3.8 Einführung von Gewichten bei allgemeinen Beziehungen	25
6.3.9 Ausgleichsrechnung in Matrizenschreibweise	25
6.4 Ausgleichung bei Bestehen von Nebenbedingungen	26
6.4.1 Einführung	26
6.4.2 Fall direkter Beobachtungen und einer Bedingungsgleichung	27
6.4.3 Nichtlineare Nebenbedingungen	28
6.4.4 Allgemeinere Fälle	28
Kapitel 7: Korrelation von Zufallsgrössen	7 –
7.1 Einleitung	1
7.2 Lineare Korrelation	1
7.3 Nichtlineare Korrelation	3
7.4 Korrelationsfunktionen	4

Kapitel 8: Allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz und seine Anwendung für die universellen Konstanten der Physik	8 –
8.1 Problemstellung: Gibt es korrelierte Fehler ?	1
8.2 Korrelationskoeffizient für statistische Fehler	2
8.3 Allgemeines Fortpflanzungsgesetz zufälliger Fehler	3
8.4 Die universellen fundamentalen Konstanten der Physik	5
8.4.1 Zur Vorgeschichte	5
8.4.2 Über die Vorgehensweise der CODATA	6
8.4.3 Korrelation der Fehler	8
8.4.4 Abschliessende Bemerkungen	10
Kapitel 9: Das Schlussresultat und seine Unsicherheit sowie die Planung von Experimenten	9 –
9.1 Rückblick auf das Problem der Messgenauigkeit	1
9.2 Vorgehen bei der Auswertung von Messungen	4
9.2.1 Traditionelle Terminologie	4
9.2.2 Neue Terminologie	4
9.2.3 Typ A-Unsicherheit	5
9.2.4 Typ B-Unsicherheit	6
9.2.5 Kombinierte Unsicherheit	7
9.3 Arbeitsschema für die Bestimmung der Unsicherheiten	7
9.4 Folgerungen für die Planung und Durchführung von Experimenten	10
9.5 Schlussbemerkung	12
Anhänge:	
Tabelle der Gauss-Funktion	A – 1
Tabelle der Fehlerfunktion	A – 2
Tabelle der t -Verteilungsfunktion	A – 3
Tabelle der F -Verteilungsfunktion (5 %)	A – 4
Tabelle der χ^2 -Verteilungsfunktion	A – 5
Tabelle der Verteilungsfunktion des Korrelationskoeffizienten r	A – 6
Formelschatz zur Statistik (Anhang zu Kapitel 3)	B
Hinweise zu weiterführender Literatur	C
Universelle physikalische Konstanten 1986	D
Normenwerke (Literaturliste)	E
Nachwort	F

1. Einleitung (Inhaltsübersicht und Terminologie)

Die Entwicklung der Naturwissenschaft und der auf sie aufbauenden Technik nahm ihren Anfang mit einer qualitativen Naturbeobachtung. Im Altertum und bis ins Mittelalter hat man sich damit im wesentlichen begnügt und aus diesen vordergründigen Beobachtungen eine Naturphilosophie aufgebaut. Ein entscheidend neuer methodischer Schritt wurde durch Galileo Galilei (1564 – 1642) vollzogen, nämlich die Durchführung von *Experimenten* als aktive und quantitative Form der Naturbeobachtung. Dabei wird das Verhalten der Natur unter den für das Experiment geschaffenen Bedingungen durch Messungen zahlenmässig erfasst. Die erhaltenen Messergebnisse können dann mit Hilfe der Mathematik zu sogenannten «Naturgesetzen» zusammengefasst werden, welche auf die Frage «Wie verhält sich die Natur?» Antwort geben.

Seit Galilei kann man folglich die Physik als *Wissenschaft des Messens* bezeichnen. Andere Gebiete der Naturwissenschaften haben sich ebenfalls in diese Richtung entwickelt und insbesondere haben die Ingenieurwissenschaften darauf aufgebaut: Alle diese Disziplinen stützen sich wesentlich auf die in der Physik entwickelte Mess- und Experimentiertechnik ab. Für die Verdichtung von experimentellen Ergebnissen zu Naturgesetzen, für die Bestätigung oder Widerlegung von theoretischen Hypothesen und für zahllose Anwendungen in technischen und naturwissenschaftlichen Bereichen ist die Frage der Zuverlässigkeit von Messresultaten, d.h. die *Beherrschung der Probleme der Messfehler* von entscheidender *Bedeutung*, denn einem Ergebnis von ungenügender oder zweifelhafter Genauigkeit kommt kein Nutzwert zu.

Die vorliegende Monographie hat zum Ziel, als ein kurzgefasstes Lehrbuch angehende Experimentatoren in die für alle Disziplinen geltenden Probleme der Auswertung und Planung von Messungen einzuführen. Darüber hinaus soll sie als handliches Nachschlagewerk für die praktische Arbeit im Laboratorium dienen können. Breiten Raum nimmt die Behandlung der zufälligen Fehler (zufällige Messabweichungen) ein, welche mit den Methoden der mathematischen Statistik angegangen werden können. Es soll somit ein Zugang zu diesen Methoden als Werkzeug des praktisch arbeitenden Forschers vermittelt werden.

Die heutige Messtechnik macht immer mehr Gebrauch von einer digitalen Erfassung der Messwerte, welche mit einem Computer ersten Um- und Ausrechnungen unterworfen werden. Wenn dadurch der Experimentator weitgehend mühsamer Arbeit entbunden wird, so bedarf er dennoch eines Verständnisses dafür, welche statistische Grundlagen den einprogrammierten Auswerte- und Ausgleichsverfahren zugrunde liegen. Denn nur gestützt auf ein

solches Verständnis ist der Experimentator in der Lage, die Zahlenwerte, die ihm der Computer liefert, richtig und sachgerecht zu interpretieren.

1.1 Inhaltsübersicht

Wie beim Experiment als Überbegriff stellt das «*Messen*» eine zielgerichtete Tätigkeit dar, bei der für die zu messende physikalische Grösse (Messgrösse) unter definierten Bedingungen das quantitative Verhältnis zur Einheit der physikalischen Dimension bestimmt wird. Auch bei peinlicher Einhaltung der Messbedingungen treten – gewissermassen naturgesetzlich – Abweichungen unter den erhaltenen Messwerten auf.

Systematische Effekte, wie z.B. durch mangelhafte Messgeräte, treten bei wiederholten Beobachtungen mit gleichen Betrag und Vorzeichen auf. Diese systematischen Abweichungen (Messfehler) lassen sich grundsätzlich nie völlig ausschliessen; durch geeignete Massnahmen sind sie aber weitgehend vermeidbar oder auszukorrigieren (Kap. 2). Messwiederholungen geben zwar keine Hinweise auf die vorgenannten systematischen Effekte, führen aber wegen unvermeidbarer *zufälliger Effekte* zu Serien von Messwerten, die – wie *Stichproben* in der Statistik – eine Streuung aufweisen. Die Methoden der mathematischen Statistik, wie sie ab Kap. 3 dargestellt werden, gestatten *Bestwerte* (*Schätzwerte*) für die gesuchte Messgrösse und für ihre Streuung (Standardabweichung, Varianz) zu erhalten. Wie man die *Schlussresultate* von Messungen mit den zugehörigen Unsicherheiten korrekt angeben soll, schildert Kap. 9, insbesondere Abschnitt 9.3.

Oft ist indessen die gesuchte Grösse eine Funktion mehrerer Messgrössen. Dann lässt sich durch *Fortpflanzungsgesetze* (Abschnitte 2.4, 3.9 und 8.3) berechnen, wie sich die Unsicherheiten der verschiedenen Messgrössen auf die gesuchte Grösse auswirken.

Die nachfolgend in diesem Buche vermittelten Kenntnisse sind in zwei verschiedenen Situationen der Praxis wichtig, nämlich

- einerseits *nach Abschluss* der Messungen, wenn es um die korrekte Auswertung der Daten geht – eine Situation, welche der gewählte Buchtitel in den Vordergrund stellt –, und
- andererseits den Messungen *vorauslaufend*, d.h. bei der *Planung* von einzelnen Experimenten (siehe Abschn. 9.4) und bei der Neuentwicklung hochwertiger Produkte. Bei der Konzipierung des Produktionsablaufs, der Erprobung des neuen Produkts und den zugehörigen Messverfahren zur Gewährleistung der Produktspezifikationen (Qualitätssicherung) ist ein erfolgreiches präventives «Fehlermanagement» von grösster Bedeutung.

1.2 Grobe Fehler

Im ganzen folgenden Buchtext wird stillschweigend vorausgesetzt, dass alle Messdaten **frei** sind von **groben Fehlern**, wohlwissend dass diese Fehlerart in Wirklichkeit nicht so selten ist. Wir verstehen unter groben Fehlern Irrtümer, Fehlüberlegungen oder Missverständnisse bei der Bedienung und Ableseung der Messinstrumente (z.B. auch falsche Messbereichseinstellung), bei der Protokollierung von Messdaten, Rechen- und Vorzeichenfehler, Programmierfehler in den Auswertprogrammen und dgl. mehr. Gegen solche Fehler hilft nur *äusserste Sorgfalt* (Selbstdisziplin!) sowie *Überprüfungen* und *Kontrollen*, vorteilhafterweise durch eine zweite Person. In der Unsicherheit, die jedem Schlussergebnis von Messungen beizugeben ist, können und sollen keine Anteile von groben Fehlern enthalten sein!

1.3 Auswertekonzepte und Terminologie

In der Statistik sind seit jeher vielfach synonyme Begriffe verwendet worden, welche oft auch je nach Anwendungsgebiet variieren. So war und ist in der Physik der Begriff «mittlerer Fehler» als gleichbedeutend mit «Standardabweichung» noch im Gebrauch. Seit etwa 1980 wurden in Normenwerken wie z.B. deutsche Industrienorm (DIN 1319) geänderte Begriffe eingeführt. Um Verwechslungen mit dem Begriff «Fehler» im Bereiche der Qualitätsprüfung auszuschliessen wurde – »gegen den Widerstand von Seiten der Messtechnik« (Zitat aus DIN 1319–3, Seite 13, 1983) – mit einer etwa seit C.F. Gauss bestehenden Tradition gebrochen und statt «Messfehler oder kurz: Fehler» der Begriff «Messabweichung» eingeführt.

Ebenfalls seit etwa 1980 ist ein internationaler Konsens durch Zusammenarbeit der wichtigsten metrologischen Institutionen unter dem «Dach» der ISO (International Standards Organisation, Geneva) zustande gekommen, welcher im «*Guide to the expression of uncertainty in measurement*» umfassend dargelegt ist. Er wird im folgenden als «ISO Guide» zitiert. Erstmals 1993 publiziert, liegt dieser «ISO Guide» nun in einem korrigierten Nachdruck von 1995 vor. Eine Literaturliste aktueller Normenwerke ist im Anhang E zu finden. Die Arbeiten der CODATA genannten Kommission für die Bestimmung ausgeglichener Werte der universellen physikalischen Konstanten sind anfangs der Achtzigerjahre unter Vorwegnahme des Konzepts und der Terminologie des ISO Guide ausgeführt worden (→ Kap. 8.4 und Anhang D).

Worauf stützt sich das neue Begriffskonzept? Wie im Kap. 9 eingehender dargestellt wird, werden im ISO Guide die ideellen (hypothetischen) Begriffe «wahrer Wert» und «Fehler» – in strengem Sinne verstanden – abgelehnt. Das neue Konzept gründet im Sinne eines *operationalen* Vorgehens ausschliesslich

auf *messbaren und empirisch bestimmbaren Grössen*. Für das Schlussergebnis und die zugehörige Genauigkeitsangabe können nur Schätzwerte (im Sinne der Statistik) angegeben werden. Die Genauigkeitsangabe ist stets eine zwar quantifizierbare *Unsicherheit* (engl.: uncertainty). Dieser Begriff soll jedoch zum Ausdruck bringen, dass Zweifel darüber bestehen, wie gut das Schlussergebnis den Wert der zu messenden Grösse repräsentiert. Neu ist im ISO Guide die Unterteilung der Unsicherheitsbeiträge in zwei Typen A (auf statistischer Analyse beruhend) und B (auf andere Weise bestimmte Beiträge) sowie ihre konsequente Vereinigung zu einer kombinierten Unsicherheit auf der Grundlage gleicher Vertrauenswahrscheinlichkeit (Additivität der Varianzen).

Im vorliegenden Buch werden – auch aus didaktischen Gründen – bisherige konventionelle, empirische Begriffe vor allem in den Kapitel 2 und 3 verwendet. In Fällen, wo Unterschiede der Bezeichnungen bestehen, werden die Alternativen dazugeschrieben und zwar, wie das Beispiel von Seite 3–10 zeigt, jeweils in folgender Weise: Die Begriffe «empirische Standardabweichung» und «mittlerer Fehler der Messwerte» sind als Synonyme nebeneinander gestellt. Der in den ISO-Normen verwendete Begriff wird als «(ISO: standard deviation)» angegeben, während der entsprechende Begriff der DIN-Norm als «(DIN 1319-1: Wiederholstandardabweichung)» zitiert wird. Zu betonen ist, dass - unabhängig von den Konzepten und sprachlichen Begriffen (traditionell oder modern) - bei der Auswertung von Messungen stets die gleichen Daten und der gleiche mathematische Formalismus angewendet werden.

Der Vereinheitlichung der Begriffe und Methoden der Planung und Auswertung von Messungen sowie der Darstellung der Schlussergebnisse kommt grosse wissenschaftliche, aber auch wirtschaftliche und juristische Bedeutung zu. Es ist daher erwünscht, dass zwischen nationalen und internationalen Normenwerken noch bestehende Divergenzen eliminiert werden, ein Postulat, welches in einigen Jahren verwirklicht sein dürfte.

1.4 Praktische Hinweise für den Leser

Zur Illustration werden einfache Beispiele, meist aus der Physik, herangezogen. Zum Zwecke der Abgrenzung gegenüber dem Haupttext werden sie in einer anderen Schrift dargestellt (Helvetica). Der Leser, der hauptsächlich an der Darlegung der statistisch-mathematischen Methoden interessiert ist, kann solche Teile überspringen. Um die Verwendung als Nachschlagewerk zu erleichtern, sind in jeder Kopfzeile der Name des Kapitels angegeben und die Seitenzahlen mit der Kapitelnummer versehen (z.B. 4 – 12). Jedes neue Kapitel beginnt stets mit der Seite 1 und zwar rechts, wenn man das Buch aufschlägt.

2. Systematische Fehler und ihre Fortpflanzung

2.1 Einleitung

Systematische Messfehler (ISO: systematic error; DIN 1319–1: systematische Messabweichung) nennen wir solche Fehleranteile, welche bei Wiederholungen einer Messung unter identischen Messbedingungen einen konstanten Wert besitzen, d.h. jedesmal in gleicher Grösse und mit gleichem Sinn (Vorzeichen) auftreten. Aus dieser Definition folgt, dass systematische Fehler durch Wiederholungen der Einzelmessung weder erkannt noch eliminiert werden können. Solche Wiederholungen unter festgehaltenen Messbedingungen führen aber nicht jedesmal zu gleichen Messwerten (engl.: observed value); vielmehr treten Abweichungen auf, welche nach Betrag und Vorzeichen zufallsbedingt schwanken. Diese statistisch schwankenden Messfehleranteile nennt man *zufällige Messfehler* (ISO: random error, DIN 1319–1: zufällige Messabweichungen). Sie lassen sich mit den Methoden der statistischen Mathematik behandeln, was in den Kapiteln 3 bis 8 ausführlich dargestellt wird.

In den nun folgenden Abschnitten werden verschiedene Arten und mögliche Ursachen systematischer Fehler dargestellt. Daraus ergeben sich Möglichkeiten zu ihrer Entdeckung und Vermeidung oder ihrer Verkleinerung durch Anbringen von Korrekturen (ISO: correction, DIN 1319–1: Korrektion) auf ein dem behandelten Problem entsprechendes Mindestmass oder – in andern Fällen – auf so kleine Werte, dass sie im Vergleich zu den Unsicherheiten anderer Messgrössen vernachlässigbar sind.

2.2 Arten systematischer Fehler

2.2.1 Umwelteinflüsse

Ein gut konzipiertes Experiment in den experimentellen Naturwissenschaften ist gekennzeichnet durch eine weitgehende Isolierung des zu untersuchenden Systems von störenden äusseren Einflüssen, so dass sich nur geplante Änderungen von einem oder wenigen Parametern auf die zu messenden Grössen auswirken können. Jede ungewollte Einwirkung der Umgebung auf die Versuchsanordnung führt zu einem fehlerhaften Ergebnis. Eine Hauptaufgabe des Experimentators besteht deshalb darin, durch eine genaue Analyse des Messverfahrens solche Fehlerquellen zu entdecken und durch geeignete Führung des Experiments störende Einflüsse entweder auszuschalten, zu reduzieren oder nachträglich rechnerisch durch Korrekturen zu berücksichtigen (ISO: correction, DIN 1319–1: Korrektion).

Beispiele dafür sind:

- Vernachlässigung von Umwelteinflüssen
 - Vernachlässigung des Auftriebs der Luft bei der Wägung von Substanzen, deren Dichte von derjenigen der Gewichtssteine abweicht.
 - Kapillardepression bei Druckmessungen mit Quecksilberbarometer. Dieser Fehler kann entweder rechnerisch kompensiert oder durch Verwendung von Rohren mit grossem Durchmesser auf ein unbedeutendes Mass reduziert werden.
- Ungenügendes Konstanthalten der Versuchsbedingungen
 - Mangelnde Konstanz von Spannungs- bzw. Stromquellen bei elektrischen Messungen.
 - Die Referenztemperatur bei Messungen mit Thermoelementen entspricht nicht dem Sollwert.

Oft ist es weder möglich noch vom Aufwand her erwünscht, alle äusseren Einflüsse zu überwachen und konstant zu halten. Beispielsweise werden öfters Messungen bei Zimmertemperatur ausgeführt, ohne dass man sich den Aufwand leistet, die Temperatur zu messen und auf einem konstanten Wert zu halten. In solchen Fällen ist aber Vorsicht geboten, da unter Umständen unüberwachte Grössen mehr Einfluss haben, als man sich vorstellt. Derartige Einflüsse können systematische Abweichungen verursachen, die an zu verschiedenen Zeiten erhaltenen Messreihen festgestellt werden (Kap. 5: t und F -Test sowie Kap. 6.2: Z -Test).

Rückwirkungen der Messgeräte auf das zu untersuchende System lassen sich grundsätzlich nie ausschliessen.

Trivialbeispiele:

- Pneudruckmesser: Streng genommen entspricht der abgelesene Druck einem zu niedrigen Wert gegenüber dem ursprünglich vorhandenen Druck, weil zur Messung das Volumen des Manometers mit Luft aus dem Pneu gefüllt werden muss. Durch eine Bestimmung des Eigenvolumen des Manometers lassen sich die Messwerte bis auf unwesentliche Restbeträge korrigieren.
- Elektrische Messgeräte besitzen einen Eigenverbrauch an Energie für die Anzeige auf Skalen oder Ziffern (direktanzeigende Instrumente). Elektronische (Verstärker-) Instrumente entziehen dem zu messenden System vergleichsweise wenig Energie, weil sie zu ihrem Betrieb Hilfsenergie aus einer Batterie oder dem Netz entnehmen können; die Rückwirkung solcher Messinstrumente auf den zu messenden Schaltkreis ist deshalb sehr oft vernachlässigbar klein.

Im Gegensatz dazu sind die Wechselwirkungen zwischen dem zu untersuchenden System und den Messgeräten des Beobachters in Fällen, die der Quantenmechanik gehorchen, vielfach so gross, dass die Messbarkeit grundsätzlich eingeschränkt ist (Heisenbergsche Unschärferelation).

2.2.2 Unvollkommenheit der Messgeräte

In einer Systematik der Fehler müssen auch die verschiedenartigen Fehler der Messgeräte selbst erwähnt werden. Neben Konstruktions- und Fabrikationsfehlern wie etwa die Nichtlinearität (z.B. eines Mikrometers) ist auch mit Justier- und Eich- (Kalibrier-)fehlern zu rechnen. Gewisse Messvorrichtungen können im Laufe der Zeit durch Zunahme der Reibung in den Lagern und Korrosion oder durch altersbedingte Änderungen z.B. der elastischen Eigenschaften der Materialien schlecht werden. Meist lässt sich auch ein gewisses Lager- und Getriebeispiel nicht ganz vermeiden. Ein solcher Hysteresefehler des

Messinstrumente kann aber verkleinert werden, indem man sich dem Messwert jeweils von der gleichen Seite her nähert. Sofern solche Instrumentenfehler während der Dauer des Experimentes nicht konstant sind, liefern sie auch Beiträge zu den zufälligen Fehlern.

Beispiele möglicher Quellen systematischer Fehler bei elektrischen Messinstrumenten:

- Eigenverbrauch (Geringer Eigenverbrauch und hohe Genauigkeit schliessen sich aus!)
- Eichfehler
- Fehlerhafte Nullpunkteinstellung, Lageabhängigkeit, Nullpunktsdrift
- Abweichung der Eichtemperatur von der Messtemperatur
- Reibung

Grundsätzlich ist anzustreben, dass für Messungen hoher Präzision Messinstrumente mit beweglichem Messsystem als Nullindikatoren oder nur zu Differenzmessungen verwendet werden und nicht für direkte Absolutmessungen. Ist die absolute Genauigkeit eines Messgeräts wesentlich, so ist seine Eichung oft zu überprüfen.

2.2.3 Unzulänglichkeiten von Seiten des Experimentators

Systematische Messfehler können ihre Ursache in einem ungenügenden theoretischen Verständnis des Messvorganges haben. Die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit aus der Frequenz und der Wellenlänge von Mikrowellen in Luft kann nur dann ein exaktes Resultat ergeben, wenn der Brechungsindex der Luft berücksichtigt wird. Bei der c -Messung aus Laufzeit und Distanz (Echomethode) muss ausserdem der Unterschied zwischen Signal- und Phasengeschwindigkeit, d.h. die Dispersion des Brechungsindex in Rechnung gesetzt werden. Weitere Beispiele siehe Abschnitt 2.3.1.

Eine weitere Art menschlicher Unzulänglichkeit wird treffend mit dem englischen Wort «bias» bezeichnet, was in diesem Zusammenhang mit «Voreingenommenheit» übersetzt werden kann (Bias = Vorspannung in elektronischen Schaltungen). Eine Form von «bias» ist die mangelnde Objektivität den eigenen Messungen gegenüber («Wunschbeobachtungen»). Man hat auch jene «systematischen Fehler des Experimentators» dazu zu zählen, die etwa durch regelmässige Parallaxe beim Ablesen von Zeigerinstrumenten unter annähernd gleichem Winkel oder ggf. durch Farbenblindheit hervorgerufen werden können (Beobachtungsfehler). Nicht einseitig gerichtete Einflüsse des Beobachters (z.B. bei der Ablesung) ergeben Beiträge zu den Zufallsfehlern.

2.3 Entdeckung und Vermeidung systematischer Fehler

2.3.1 Überprüfung der Theorie

Die zu verwendende Messmethode ist einer genauen Analyse zu unterziehen, um abzuklären, ob die dem Messvorgang selbst zugrundeliegende Theorie in allen Teilen gesichert ist. Ist dies nicht der Fall, so müssen oft Zusatzexperimente durchgeführt werden oder die Theorie muss viel gründlicher erarbeitet werden. Ein vertieftes theoretisches Verständnis wird meist erst später bei weiteren Fortschritten in einem allgemeineren Rahmen gewonnen.

Beispiel: h/e - Bestimmung durch den inversen Photoeffekt

In einer Vakuumröhre werden Elektronen aus einer Glühkathode in einem angelegten Potential (6 – 12 kV) beschleunigt. Auf der Anode erzeugen sie Röntgenstrahlen (Bremsstrahlung), deren Wellenlänge in einem Kristallspektrographen bestimmt werden kann. Die kurzwellige Grenze des Spektrums entspricht der vollständigen Umwandlung der kinetischen Energie des Elektrons in Photonenenergie:

$$eV = (1/2) \cdot m_e v^2$$

$$hc/e = V\lambda_{min}$$

und daraus folgt

Wenn eine Genauigkeit von Zehntel Prozenten genügt, und in Unkenntnis der Theorie der Elektronen in Metallen und im Vakuum, wird man das von den Elektronen durchlaufene Potential V mit der angelegten Spannung gleichsetzen.

Ein vertieftes theoretisches Verständnis ergibt aber folgendes:

- Die Elektronen durchlaufen nicht das Potential V , sondern tatsächlich $V + V_W$, wobei V_W die Kathodenaustrittsarbeit bedeutet (z.B. 4.5 Volt für Wolfram).
- Unmittelbar nach dem Austritt aus der Kathode besitzen die Elektronen nicht die Geschwindigkeit null, sondern ihre kinetische Energie ist infolge der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung beim Austritt aus der Kathode um ca. 0.2 Volt verschmiert.
- Das Linienprofil an der Quantengrenze (Intensität als Funktion von V) ist bedingt durch die
 - endliche Wellenlängenauflösung des Spektrographen,
 - inelastischen Stöße der einfallenden Elektronen an Hüllenelektronen des Anodenmaterials,
 - sowie an solchen adsorbierter Fremdstoffe auf der Anode.

Theoretisch ist es sehr schwierig, das Linienprofil zu berechnen. Es besteht daher eine Unsicherheit, welcher Punkt des Profils der korrekten Quantengrenze entspricht. (Einzelheiten siehe in: *Handbuch der Physik* (S. Flügge, Bd. XXXV, p. 39 und E.R. Cohen + J.W.M. DuMond, *Rev. Mod. Phys.* **37**, 549 (1965)).

2.3.2 Veränderung der Messbedingungen

Grundsätzlich sollen stets auch diejenigen experimentellen Parameter variiert werden, welche aufgrund der Theorie (oder Arbeitshypothese) des Messvorgangs *keinen* Einfluss auf die unbekanntes Messgröße haben sollten.