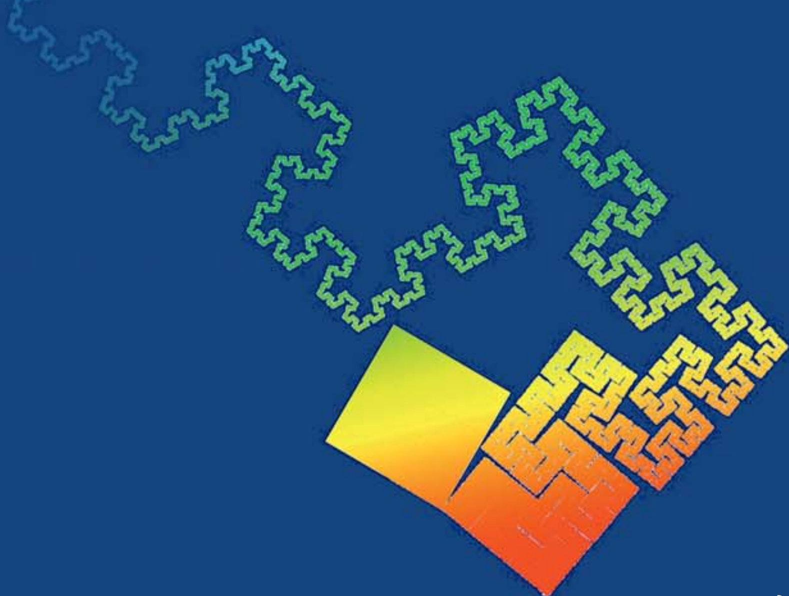
Georg Glaeser Hrsg.

77-mal Mathematik für zwischendurch

Unterhaltsame Kuriositäten und unorthodoxe Anwendungen



SACHBUCH

Springer

77-mal Mathematik für zwischendurch

Georg Glaeser
(Hrsg.)

77-mal Mathematik für zwischendurch

Unterhaltsame Kuriositäten und unorthodoxe Anwendungen

Springer

Hrsg.
Georg Glaeser
Abteilung für Geometrie
Universität für angewandte Kunst Wien
Wien, Österreich

ISBN 978-3-662-61765-6 ISBN 978-3-662-61766-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einbandabbildung: Georg Glaeser

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Geleitwort

Mathematik aus der Ferne – geht das?

Die Antwort ist ja, und zwar schon lange vor der Erfindung der uns verfügbaren Medien – was die Briefwechsel zwischen berühmten Persönlichkeiten wie Gauß und Laplace, Pascal und Fermat, Pearson und Rayleigh – um nur einige Beispiele zu nennen – eindrucksvoll belegen.

Das Instrument des Briefs (allerdings nunmehr per Email versandt) zu verwenden um Begeisterung für Mathematik bei Schülerinnen und Schülern zu wecken und fördern, war eine Idee des leider 2019 verstorbenen Innsbrucker Mathematikprofessors Gilbert Helmberg, die er, gemeinsam mit einem Kreis von ebenso unermüdlichen Kolleginnen und Kollegen seit 2010 konsequent und sehr erfolgreich umgesetzt hat.

Das vorliegende Buch macht die Vielzahl der im Laufe der Zeit entstandenen Beispiele nun in gesammelter, thematisch geordneter und gebundener Form zugänglich.

Für diese Aktivität ganz im Sinne des ureigensten Auftrags der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft ÖMG, möchte ich mich namens der ÖMG recht herzlich bei den Verfasserinnen und Verfassern bedanken.

Barbara Kaltenbacher, Vorstand ÖMG

Helmberg schaffte es also, eine Gruppe von österreichischen Mathematikerinnen und Mathematikern dazu zu bringen, monatlich einen kurzen „Brief“ zusammenzustellen, wobei alternierend eine Person federführend sein sollte. Durch die absichtlich breite Streuung der Autoren – von Kursleitern der Mathematik-Olympiaden und Lehrerinnen und Lehrern an höheren Schulen bis zu Lehrenden an verschiedenen Universitäten mit ihren oft gänzlich unterschiedlichen Spezialisierungen – konnte ein Spektrum erreicht werden, das wohl jede mathematisch interessierte Person (Lehrende und Schülerinnen und Schüler) in einem oder anderem Beitrag anspricht. Helmberg nahm bis zuletzt die Funktion des Koordinators mit großer Begeisterung wahr. Diese Begeisterung besteht auch noch heute, und die Mathebriefe werden – nach einer kurzen Pause – unter der Leitung von Otto Röschel (Technische Universität Graz) weitergeführt.

Zum Zeitpunkt von Helmbergs Ableben waren knapp hundert bunt gemischte Aufsätze erschienen. Bei etwa einem Fünftel ging es um spezifische Nachrichten an

Lehrende der Mathematik. In der verbleibenden Mehrheit der Briefe ging es um Algebra und Logik, Analysis, Geometrie, Zahlentheorie, Stochastik, „Olympisches" und andere Themen, die hier im Kapitel „Diverses" zusammengefasst sind. Es handelt sich nicht selten um unterhaltsame Kuriositäten und auch unorthodoxe Anwendungen der Mathematik. Auch wenn die einzelnen Briefe nach wie vor auf der Webseite der ÖMG einzeln abrufbar sind, schien es an der Zeit, sie themenmäßig zu ordnen und gesammelt zu publizieren. Der Herausgeber dankt an dieser Stelle der ÖMG, die das befürwortet und ermöglicht hat.

Georg Glaeser, Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

I. ALGEBRA UND LOGIK

1. Adam Ries

RUDOLF TASCHNER

1492, in dem Jahr, als Columbus Amerika entdeckte, wurde ADAM RIES, der bedeutendste Rechenmeister im deutschsprachigen Raum, geboren. In einem 1522 geschriebenen Buch, das ungeheure Verbreitung erlangte, erklärte er seinen Zeitgenossen das damals neue System, die unendlich vielen Zahlen mit Hilfe von nur neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zusammen mit der eigenartigen Ziffer 0 zu erfassen und mit ihnen zu rechnen. Der Trick beruht einfach darin, dass man die Zahlen in die Einheiten 1, 10, 100, 1000, 10000, ... aufteilt. Zum Beispiel besteht die in römischen Zahlzeichen geschriebene Zahl MMDCCCLXIII aus 2 Tausendern, 8 Hundertern, 6 Zehnern und 3 Einern. Statt mühsam

$$2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

zu schreiben, notierte sie ADAM RIES einfach als 2863. So sind wir es auch heute gewohnt.

Fig. 1: ADAM RIES

Der große Vorteil der von ADAM RIES gelehrten Dezimalschreibweise war: Man braucht nur die Rechenregeln mit den neun Ziffern zu kennen, das „Ein-plus-eins“ und das „Ein-mal-eins“. Zusammen mit ein paar Regeln über den Stellenwert und die Null hat man dann das Rechnen mit allen Zahlen im Griff, egal ob sie klein oder gigantisch sind. Ein weiterer Vorteil des Rechnens nach ADAM RIES war: Er konnte nicht nur die großen Einheiten 1, 10, 100, 1000, 10000,..., sondern auch die kleinen Einheiten der Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. nach genau der gleichen Weise erklären. Dabei half ihm das Komma als zusätzliches Zeichen: Die unter 1 liegenden kleineren Einheiten notiert er als 0,1 oder als 0,01 oder als 0,001 usw. Wenn zum Beispiel eine Größe aus 5 Zehnern, 6 Einern, 3 Zehntel und 5 Tausendstel besteht, sollte man sie „nach Adam Riese“ ausführlich folgendermaßen anschreiben:

G. Glaeser (Hrsg.), *77-mal Mathematik für zwischendurch*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3_1

$$5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}001.$$

In Kurzform notiert sie Adam Ries so: 56,305. Dabei steht die 0 zwischen den Ziffern 3 und 5 für die Tatsache, dass es bei dieser Größe kein Hundertstel gibt. Wenn er ganz genau sein wollte, müsste Adam Ries zugeben, dass es sich bei dieser „Dezimalzahl“ nicht um eine Zahl, sondern um eine Anzahl handelt: nämlich um die Anzahl von 56 305 Tausendstel. Aus dieser Sichtweise lehrte Adam Ries, wie man mit Dezimalzahlen zu rechnen hat: Will jemand zum Beispiel 56,305 zu 11,04 addieren, so gilt es, genau genommen, 56 305 Tausendstel zu 1104 Hundertstel zu addieren. So ohne weiteres geht das natürlich nicht: wie addiert man Tausendstel zu Hundertstel? Dazu muss man wissen, dass 1104 Hundertstel zehnmal mehr, nämlich 11 040 Tausendstel sind. Erst dann kann man die 56 305 Tausendstel dazuzählen und zur Summe von 67 345 Tausendstel, also zur Dezimalzahl 67,345 gelangen. Adam Ries hat all dies zuerst an vielen Beispielen seinen Leserinnen und Lesern lang und breit erklärt. Schließlich brachte er ihnen eine leicht zu merkende Rechenregel bei, mit denen man, ohne lange nachdenken zu müssen, Dezimalzahlen addiert: Er forderte, die Summanden so untereinander zu schreiben, dass die beiden Kommas senkrecht untereinander liegen. Dann habe man die Zahlen so zu addieren, wie wenn das Komma nicht vorhanden wäre (und wo keine Ziffer steht, habe man sich eine Null zu denken). Schließlich trägt man im Ergebnis das Komma an der Stelle ein, worüber sich die Kommas der Summanden befinden. Also besteht die Rechnung aus den folgenden drei Schritten:

$$\begin{array}{lll} 11{,}04 & 11{,}040 & 11{,}04 \\ 56{,}305 & \underline{56{,}305} & \underline{56{,}305} \\ & 67\,345 & 67{,}345 \end{array}$$

Auch für das Subtrahieren, das Multiplizieren, das Dividieren von Dezimalzahlen fand er Rechenregeln, die seit seiner Zeit bis heute unverändert geblieben sind. Mehr als hundert Mal musste das Rechenbuch des Adam Ries nachgedruckt werden, so gut verkaufte es sich. Es war wirklich ein Wunderwerk. Alle Zahlen, die riesengroßen, bei denen die Buchstaben der römischen Zahlzeichen bei weitem nicht ausreichen, und die winzig kleinen, welche die Römer mit ihren Zahlzeichen nicht einmal anschreiben konnten, alle unendlich vielen Zahlen waren bei Adam Ries mit den zehn Ziffern und dem Komma erfasst. Und selbst die aberwitzigsten Rechnungen mit Zahlengiganten und mit Zahlenzwergen lehrte er aufs Einfachste durchzuführen. Vor allem war das Buch deshalb so erfolgreich, weil es nicht in Latein, sondern in Deutsch abgefasst war. Es war nicht für die wenigen Gelehrten, sondern für alle geschrieben. Denn Adam Ries wollte, dass möglichst viele seiner Mitbürgerinnen und Mitbürger rechnen können, wissen, wie man mit Zahlen im Handel, im Gewerbe und beim Messen und Wägen umgeht, und dadurch die Welt besser verstehen. Er ist das Vorbild aller ihm nachfolgenden Lehrerinnen und Lehrer.

2. Petrus Apianus und der Dreisatz

RUDOLF TASCHNER

PETER BIENEWITZ hieß der 1495 in Leisnig in Sachsen geborene Mann, der sich später PETRUS APIANUS nannte. Apis ist nämlich das lateinische Wort für Honigbiene, und es war in der frühen Neuzeit sehr beliebt, seinen gewöhnlich klingenden deutschen Namen viel wichtiger und geheimnisvoller tönen zu lassen, indem man ihn ins Lateinische oder gar ins Griechische übersetzte. Im nahegelegenen Röchlitz ging PETRUS APIANUS in die Lateinschule und durfte danach in Leipzig an die Universität. Doch der begabte junge Mann suchte die damals beste Universität, die ihn diejenigen Fächer lehrte, für die er am begabtesten war: die Geographie, die Astronomie und vor allem die Mathematik. Und dies war damals fraglos die Universität in Wien.

Dort hatte der von Kaiser Maximilian I. berufene CONRAD CELTES (der eigentlich KONRAD BICKEL hieß) für alle ihm folgenden Gelehrten prägend gewirkt. Einer unter ihnen war GEORGIUS COLLIMITIUS (der eigentlich GEORG TANNSTETTER hieß). Als bester aller damals wirkenden Professoren lehrte er Medizin, das genaue Konstruieren von Landkarten, vor allem aber Mathematik. Diesen GEORG TANNSTETTER hat sich PETRUS APIANUS als Lehrmeister gewählt und um 1520, noch als sogenannter Baccalaureus, als angehender „Geselle“ im Lehrbetrieb, eine ganze Weltkarte entworfen.

Die 1521 in Wien ausgebrochene Pest ließ PETRUS APIANUS seine Wirkungsstätte wechseln: Er ging nach Bayern. Schließlich beherbergte ihn die Universität in Ingolstadt und war auf ihn, der von Kaiser Karl V. gefördert und geadelt wurde, sehr stolz. 1527, 25 Jahre vor seinem Tod, erschien ein von ihm verfasstes Buch, das nichts mit Kartenentwürfen oder mit Kometen zu tun hatte, sondern mit jenem Teil von Mathematik, der für die damaligen Bürgerinnen und Bürger der wichtigste war: dem elementaren Rechnen. Das Buch hieß: *„Ein newe und wolgegründete underweisung aller Kauffmanns Rechnung in dreyen Büchern, mit schönen Regeln und fragstücken begriffen“*.

Im ersten dieser drei Bücher geht er so vor, wie man es heute noch in den Schulbüchern lernt: Zuerst kommt eine „Numeratio“, PETRUS APIANUS lehrt die Zahlen lesen und schreiben – es handelt sich ja um die damals noch modernen arabischen, und nicht um die alten römischen Zahlzeichen. Danach werden die Grundrechnungsarten, die er *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio* und *Divisio* nennt, ausführlich erklärt. Das Kernstück aber bildet die *Regula de tri*, der sogenannte *Dreisatz*, was heutzutage als *Schlussrechnung* bezeichnet wird.

Dreisatz nennt PETRUS APIANUS diese Rechnung, weil die Aufgabe fast immer aus drei Sätzen besteht. Er erklärt alles, indem er eine Unzahl von gleichartigen Beispielen vorrechnet.

Die Rechenmethode begründet er nicht allgemein, sondern er erwartet von seinen

G. Glaeser (Hrsg.), *77-mal Mathematik für zwischendurch*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3_2

Leserinnen und Lesern, dass diese in der Einübung all dieser Beispiele das Wesentliche begreifen. Versuchen wir es anhand eines einfachen „Dreisatzes“ vorzuführen:

1. Satz: 6 Ellen Stoff kosten 18 Kreuzer.
2. Satz: 10 Ellen Stoff werden gekauft.
3. Satz: Wie viele Kreuzer muss man bezahlen?

Zuerst lehrt PETRUS APIANUS, die in diesem Dreisatz vorkommenden Zahlen in einer Zeile der Reihe nach aufzuschreiben, für die Ellen, dann für die Kreuzer, dann für die Ellen:

——— 6 ——— 18 ——— 10 ———

Und dann behauptet er, ohne näher zu erläutern, warum dies so zu geschehen habe, dass man die letzte mit der mittleren Zahl zu multiplizieren und das Ergebnis durch die erste Zahl zu dividieren habe, um zum Resultat zu gelangen. In unserem Beispiel läuft dies auf die Rechnung $(10 \cdot 18) : 6 = 180 : 6 = 30$ hinaus. Tatsächlich werden die zehn Ellen Stoff 30 Kreuzer kosten.

Heute verstehen wir natürlich, warum das wirklich stimmt, aber damals war es bereits ein Fortschritt, wenn die angehenden Kaufleute durch Training und Drill sich diese Methode einprägten. Daher gleich ein weiteres Beispiel:

1. Satz: 7 Ochsen schleppen 42 Saecke.
2. Satz: 12 Ochsen hat der Bauer.
3. Satz: Wie viele Saecke schleppen seine Ochsen?

Jetzt die Zahlen anschreiben, für die Ochsen, dann für die Säcke, dann für die Ochsen:

——— 7 ——— 42 ——— 12 ———

dann die letzte Zahl mal der mittleren Zahl, und dies durch die vordere Zahl dividieren: $(12 \cdot 42) : 7 = 504 : 7 = 72$ und fertig ist das Ergebnis: 72 Säcke werden von den 12 Ochsen des Bauern geschleppt. Doch so einfach das zu sein scheint: Die Gefahren lauern am nächsten Eck: Wenn man glaubt, den Dreisatz

1. Satz: 7 Ochsen schleppen 42 Saecke.
2. Satz: 84 Saecke sind zu schleppen.
3. Satz: Wie viele Ochsen braucht man dafuer?

genauso mit dem Anschreiben der drei Zahlen

——— 7 ——— 42 ——— 84 ———

lösen zu können, irrt man gewaltig. PETRUS APIANUS muss seinen Schülerinnen und Schülern lang und breit erklären, dass die vordere und die hintere Zahl immer *Anzahlen vom Gleichen* zu sein haben: beim ersten Beispiel die Ellen, beim zweiten Beispiel die Ochsen. Also müssen es beim dritten Beispiel die Säcke sein. Folglich hat bei diesem Beispiel der Ansatz

——— 42 ——— 7 ——— 84 ———

zu lauten. Aber selbst wenn man sich daran hält, beim Dreisatz

1. Satz: 4 Knechte brauchen 12 Tage zum Pfluegen.
2. Satz: 3 Knechte hat der Bauer.
3. Satz: Wie viele Tage brauchen sie zum Pfluegen?

ist überhaupt alles „verkehrt“. Man hat für ihn eine neue Regel zu lernen, bei der die Zahlen in verkehrter Reihenfolge angeschrieben werden. Ganz einfach ist die Regula de tri also nicht, und PETRUS APIANUS hat seine liebe Müh, für die wissbegierigen Lernenden alle Hindernisse aus dem Weg zu räumen.

3. Olympische Spiele 2017

Walther Janous

Dem Andenken von Wolfgang Gmeiner (1940 – 2017)

Nein, nein – keine Sorge, 2017 wurde auch nach der neuen Jahreszuordnung olympischer Spiele nicht in eine gerade Zahl umgewandelt. Im Folgenden ist die Rede von einigen Spiele-Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade, die im Jahr 2017 von Schülerinnen und Schülern bei mathematischen Wettbewerben zu bearbeiten waren, die in Form sogenannter Olympiaden ablaufen. Ich lade Sie ein, sich zuerst ein wenig an den vier Aufgaben zu versuchen und gegebenenfalls einen kurzen Blick auf die Lösungen zu werfen.

Also,

Aufgabe 1. Alice und Bob spielen folgendes 2017er-Spiel (mit abwechselnd ausgeführten Subtraktionen):

- Alice wählt (geheim) eine Zahl $a \in \{2,4,6,8\}$.
- Ebenso wählt Bob eine Zahl $b \in \{3,5,7,9\}$.
- Am Spielfeld steht die Zahl $z = 2^4 + 0^4 + 1^4 + 7^4$.

Nun beginnt das Spiel mit dem Ziel, die Zahl 2017 zu erreichen. Zuerst subtrahiert Alice von z die Zahl a, anschließend Bob vom Ergebnis die Zahl b, dann wieder Alice die Zahl a, dann wieder Bob die Zahl b usw., solange, bis Alice oder Bob die Zahl 2017 erreicht und damit das Spiel gewonnen hat. Andernfalls endet das Spiel unentschieden.
Man beweise, dass Bob das Spiel unter keinen Umständen gewinnen kann, und man entscheide, ob dies auch für Alice so ist.

Aufgabe 2. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2017}$. Alice und Bob reduzieren abwechselnd die Zahlen nach folgender Regel:

- In jedem Zug darf man zwei beliebige Zahlen x und y von der Tafel streichen und durch die neue Zahl $z = x + y + xy$ ersetzen.
- Das Spiel endet, sobald nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

Gewonnen hat, wer als Letzter eine ganze Zahl auf die Tafel geschrieben hat.
Man entscheide, ob Alice als Erste oder als Zweite in das Spiel einsteigen soll, wenn sie das Spiel gewinnen will, oder ob dies keinen Einfluss auf ihre Gewinnchance hat.

G. Glaeser (Hrsg.), *77-mal Mathematik für zwischendurch*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3_3

Aufgabe 3. Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2000, 17 und n. Alice und Bob spielen folgendes Spiel: Alice beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen. Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert. Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren.

- Man beweise, dass das Spiel für jedes n irgendwann zu Ende geht.
- Wer gewinnt, wenn $n = 2017$ ist?

Aufgabe 4. Auf einer Tafel stehen die Zahlen 1, 2, 3, ..., 88. Alice und Bob wählen abwechselnd eine der Zahlen, die dann von der Tafel gelöscht wird, solange, bis keine Zahl mehr auf der Tafel steht. Alice beginnt das Spiel und zählt am Schluss ihre vierzig gewählten Zahlen zusammen. Wenn sie dabei die Zahl 2017 erhält, hat sie gewonnen, andernfalls Bob. Man entscheide, ob es für Alice oder Bob möglich ist, ihren bzw. seinen Sieg zu erzwingen.

Lösungen

Aufgabe 1. Wir haben $z = 2418$. Bob kann niemals gewinnen. Andernfalls müssten Alice und Bob gleich viele Züge ausführen. Wenn wir ihre Anzahl mit n bezeichnen, müsste die Gleichung

$$2418 - n(a+b) = 2017, \text{ d.h. } n(a+b) = 401$$

gelten. Weil 401 eine Primzahl ist, ergäbe sich aber $n = 1$ oder $a+b = 1$. Beide Fälle sind aber nicht erfüllbar.
Nun zu Alice. Weil sie im Fall ihres Sieges einen Zug mehr als Bob auszuführen hat, ergibt sich die Gleichung

$$2418 - n(a+b) - a = 2017, \text{ d.h. } n(a+b) = 401 - a$$

Von den Zahlen $401 - a \in \{393, 395, 397, 399\}$ ist 397 eine Primzahl. Die übrigen haben die Primfaktorzerlegungen $393 = 3 \cdot 131$, $395 = 5 \cdot 79$ bzw. $399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$. Wegen $5 \leq a+b \leq 17$ liefert 399 die einzig mögliche Gewinnzahl von Alice, nämlich $a = 2$. Mit ihr gewinnt Alice nach 57 Zügen genau dann, wenn Bob die Zahl $b = 5$ gewählt hat.

Aufgabe 2. Es seien $x_j = \frac{1}{j}$, $j = 1, 2, \ldots, 2017$, die am Beginn des Spiels auf der Tafel stehenden Zahlen. Wegen

$$z = x + y + xy = (x+1)(y+1) - 1, \text{ d.h. } z + 1 = (x+1)(y+1)$$

ist es naheliegend, die Zahlen der ursprünglichen Tafel durch die neuen Zahlen $X_j = x_j + 1$, $j = 1, 2, \ldots, 2017$, zu ersetzen. Einem ursprünglichen Spielzug entspricht es deshalb, zwei der neuen Zahlen zu streichen und durch ihr Produkt zu ersetzen. Folglich muss die letzte Zahl der neuen Tafel

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{2017} = \frac{1+1}{1} \cdot \frac{1+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+2017}{2017} = 2018$$

sein. Das heißt aber, dass jedes denkbare Spiel mit der Zahl 2017 endet. Deshalb sollte Alice als Zweite in das Spiel einsteigen.

Aufgabe 3. Wenn drei Zahlen auf der Tafel stehen und bei einem Zug eine der drei Zahlen durch die (positive) Differenz der anderen beiden Zahlen ersetzt wird, so stehen nach diesem Zug zwei Zahlen und die Summe der beiden Zahlen auf der Tafel. Auf der Tafel sollen die Zahlen a, b und $a+b$ stehen, wobei o. B. d. A. $b > a$ ist. Dann gibt es wegen $a+b-b=a$ und $a+b-a=b$ nur einen möglichen Zug und es stehen danach a, b und $b-a$ auf der Tafel. Auch dann ist eine der Zahlen (nämlich b) die Summe der anderen beiden und es gibt nur einen möglichen Zug.

Man erkennt also, dass es spätestens ab dem zweiten Zug keine Auswahl der Züge mehr gibt und alle Züge zwangsläufig sind. Weiters erkennt man, dass ab dem zweiten Zug bei jedem Zug die größte der drei Zahlen verkleinert wird, und, weil keine der Zahlen negativ werden kann, muss nach endlich vielen Zügen eine Zahl 0 sein. Da 0 die Differenz der anderen beiden Zahlen ist, müssen diese gleich sein, es steht also 0, a, a auf der Tafel. Wegen $a-0=a$ und $a-a=0$ ist das der Endzustand, es ist kein Zug mehr möglich. Dieser Endzustand muss also jedenfalls erreicht werden. Sieger ist demnach, wer 0, a, a auf die Tafel schreibt.

Spielverlauf, wenn zu Beginn 2000, 17, 2017 auf der Tafel steht:

1. Zug (A): 2000, 17, 1983
2. Zug (B): 1966, 17, 1983
3. Zug (A): 1966, 17, 1949

usw. (wegen $2000 : 17 = 117{,}6\ldots$)

117. Zug (A): $2000 - 116 \cdot 17 = 28$, 17, $2000 - 117 \cdot 17 = 11$
118. Zug (B): 6, 17, 11
119. Zug (A): 6, 5, 11
120. Zug (B): 6, 5, 1
121. Zug (A): 4, 5, 1
122. Zug (B): 4, 3, 1
123. Zug (A): 2, 3, 1
124. Zug (B): 2, 1, 1
125. Zug (A): 0, 1, 1

und A gewinnt.

Aufgabe 4. Es scheint naheliegend, dass Bob konsequent eine Spiegel-Strategie verfolgen sollte, mit der er den Sieg von Alice immer verhindern kann. Nur welche? Die Summe der 44 Zahlen 1, 2, …, 44 beträgt 990. Deshalb hat die Summe der restlichen Zahlen 45, 46, …, 88 den Wert $990+44\cdot 44$. Damit ist jeder dieser zwei Summenwerte eine gerade Zahl. Weil 2017 eine Primzahl ist, sollte Bob folgendermaßen vorgehen:

- Wenn Alice eine Zahl $x \leq 44$ wählt, wählt Bob die Zahl $x+44$.
- Wenn Alice eine Zahl $x > 44$ wählt, wählt Bob die Zahl $x-44$.

Bei Einhaltung dieses Vorgehens muss Alice immer einen Summenwert der Art $990+44\cdot k$ erhalten, wobei der Faktor k angibt, wie viele Zahlen Alice gewählt hat, die größer als 44 sind. Weil alle dieser Werte gerade sind, verliert Alice immer.

Bemerkung. Jede der vier Aufgaben lässt Erweiterungen in verschiedene Richtungen zu.

Am Schluss dieses Beitrages bitte ich Sie, interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler auf die *mathematische Olympiade* hinzuweisen und zur Teilnahme zu ermuntern[1]. Insbesondere verweise ich auf die sehr informative Seite `https://www.math.aau.at/OeMO/`, die auch unter `https://oemo.at/OeMO/` erreichbar ist und vielfältigste Materialien bereithält.

[1] Übrigens ist das österreichische Team von der internationalen Mathematikolympiade (IMO 2017) in Rio de Janeiro mit zwei Silbermedaillen und ebenso vielen Ehrenden Erwähnungen heimgekehrt.

4. Cardano und die algebraische Gleichung dritten Grades

GILBERT HELMBERG

Eine gute alte Bekannte ist die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0. \tag{4.1}$$

Sie hat im Allgemeinen zwei Lösungen

$$x_1 \quad = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q}, \qquad x_2 \quad = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{4.2}$$

und lässt sich mit ihnen auch so schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (18.1) liefert den sogenannten Wurzelsatz von VIETA

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q. \tag{4.3}$$

Es ist nicht verwunderlich, dass sich schon im Mittelalter Mathematiker gefragt haben, wie man auf eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + ux^2 + vx + w = 0 \tag{4.4}$$

kommen könnte, und tatsächlich hat diese Frage zu einem erbitterten Streit zwischen den italienischen Mathematikern GEROLAMO CARDANO (1501–1576) und NICCOLÒ TARTAGLIA (1500–1557) geführt. Folgen wir ihren Spuren:

Als ersten Schritt vereinfachen wir die Gleichung (18.4) durch Elimination des Gliedes ux^2 mittels der Substitution

$$x = y + \alpha. \tag{4.5}$$

Diese führt – nachdem wir uns an die Binomialformeln für $(y+\alpha)^3$ und $(y+\alpha)^2$ erinnert haben — Gleichung (18.4) über in

$$\begin{aligned} (y^3 + 3\alpha y^2 + 3\alpha^2 y + \alpha^3) + u(y^2 + 2\alpha y + \alpha^2) + v(y + \alpha) + w &= 0, \\ y^3 + (3\alpha + u)y^2 + (3\alpha^2 + 2\alpha u + v)y + (\alpha^3 + \alpha^2 u + \alpha v + w) &= 0. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $\alpha = -\frac{u}{3}$ und setzen für die anderen zwei Klammerausdrücke

$$\begin{aligned} a &= \frac{u^2}{3} - 2\frac{u^2}{3} + v \qquad = -\frac{u^2}{3} + v \\ b &= -\frac{u^3}{27} + \frac{u^3}{9} - \frac{uv}{3} + w = \frac{2u^3}{27} - \frac{uv}{3} + w. \end{aligned}$$

G. Glaeser (Hrsg.), *77-mal Mathematik für zwischendurch*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3_4

Gleichung (18.4) nimmt damit folgende Gestalt an:

$$y^3 + ay + b = 0. \tag{4.6}$$

Wenn wir diese Gleichung lösen können, brauchen wir nur $x = y - \frac{u}{3}$ zu setzen und haben die Lösungen der Gleichung (18.4).

Jetzt kommt die Königsidee: Wir zerlegen y in eine Differenz $\gamma - \beta$ und versuchen, die beiden Zahlen β und γ so zu finden, dass $y = \gamma - \beta$ die Gleichung (18.6) erfüllt. Dazu überlegen wir uns die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned} \gamma &= y + \beta, \\ \gamma^3 &= y^3 + 3\beta y^2 + 3\beta^2 y + \beta^3 = y^3 + 3\beta y(y+\beta) + \beta^3 = y^3 + 3\beta\gamma y + \beta^3. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt liefert uns die Gleichung

$$y^3 + (3\beta\gamma)y + (\beta^3 - \gamma^3) = 0, \tag{4.7}$$

die also von $y = \gamma - \beta$ erfüllt wird. Wenn es uns gelingt, die Zahlen β und γ so zu finden, dass sie

$$3\beta\gamma = a, \qquad \beta^3 - \gamma^3 = b \tag{4.8}$$

erfüllen, dann ist $y = \gamma - \beta$ eine Lösung der Gleichung (18.6). Dazu erinnern wir uns an den Satz von VIETA, in dem wir

$$x_1 = \beta^3, \qquad x_2 = -\gamma^3$$

setzen – das mag etwas willkürlich anmuten, ist aber zielführend. Die erste Gleichung in (4.8) liefert uns $a^3 = 27\beta^3\gamma^3$ und zusammen mit der zweiten Gleichung in (4.8)

$$x_1 + x_2 = b, \qquad x_1 x_2 = -\frac{a^3}{27}.$$

Also sind $x_1 = \beta^3$ und $x_2 = -\gamma^3$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - bx - \frac{a^3}{27} = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \beta^3 &= x_1 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \qquad -\gamma^3 = x_2 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \\ y &= \gamma - \beta = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{27b^2 + 4a^3}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{27b^2 + 4a^3}}{6\sqrt{3}}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Diese Lösung hatte TARTAGLIA 1535 anlässlich eines Wettstreites mit ANTONIO MARIA FIOR, einem Schüler des Bologneser Professors SCIPIONE DAL FERRO (1465–1526) gefunden. Sein Fachkollege CARDANO war 1539 anlässlich der Fertigstellung seines Buches *Practica Arithmeticae Generalis* sehr daran interessiert, die Lösung der Gleichung dritten Grades kennenzulernen und entlockte sie dem widerstrebenden TARTAGLIA gegen das Versprechen, sie nicht zu publizieren. Allerdings brachte er 1543 bei einem Besuch bei DAL FERROs Nachfolger, ANNIBALE DELLA NAVE, in Erfahrung, dass DAL FERRO diese Lösung bereits gekannt habe. Offenbar hatte er daraufhin keine Skrupel, diese Lösung 1545 in seinem Buch *Ars Magna* bekannt zu machen, sehr zum Missvergnügen TARTAGLIAs.

Die heutzutage unter dem Namen CARDANOs bekannte Formel (4.9) ist noch für einige Überraschungen gut. Für die Gleichung

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

liefert sie beispielsweise die Lösung

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}},$$

die für einen brauchbaren Taschenrechner (und auch mathematisch) mit der offensichtlichen Lösung $x = 1$ übereinstimmt, eine Formel, die auf anderem Wege schwer ableitbar ist.

Offenbar bleibt man bei der Berechnung der Lösung (4.9) nur dann im Bereich der reellen Zahlen, wenn die Größe

$$\Delta = 27b^2 + 4a^3$$

größer als oder gleich Null ist. Wenn das nicht der Fall ist, wie bei der Gleichung

$$x^3 - 4x + 3 = 0,$$

die ja auch die Lösung $x = 1$ besitzt, führt uns die Formel (4.9) unweigerlich ins Komplexe — sie liefert uns nur

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-13}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-13}}{6\sqrt{3}}}.$$

Außerdem erwarten wir für eine algebraische Gleichung dritten Grades doch eigentlich nicht nur eine Lösung, sondern drei Lösungen, von denen allerdings zwei möglicherweise konjugiert komplex sein können. Offenbar spielen hier komplexe dritte Wurzeln, an die man zunächst nicht denkt, eine Rolle.

Eine bessere Einsicht in diese Situation erhalten wir am besten auf geometrischem Wege, indem wir den Graphen der Funktion

$$y = x^3 + ax + b \tag{4.10}$$

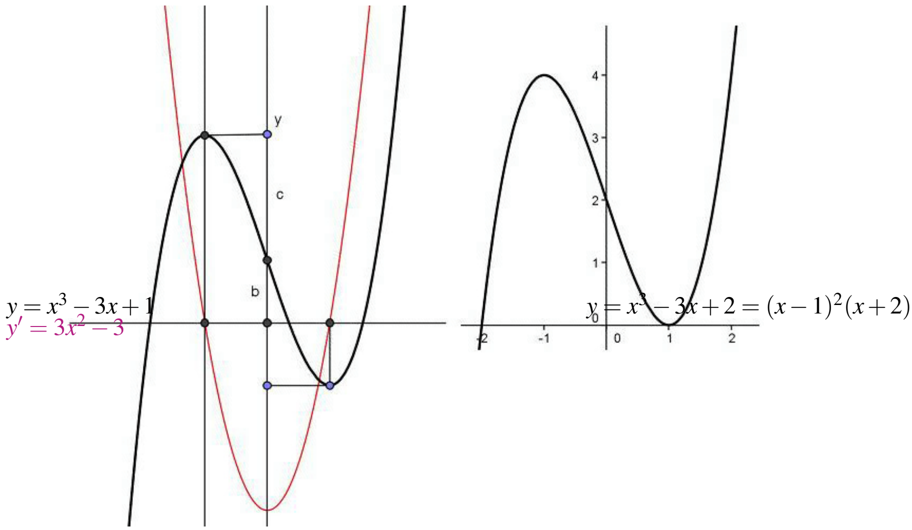


Fig. 1

auf Nullstellen untersuchen. Die Funktion (4.10) strebt für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$. Als stetige Funktion muß sie deshalb mindestens eine reelle Nullstelle besitzen. Zwei getrennt liegende lokale Extrema nimmt sie nur für $a < 0$ an, und zwar — wenn wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$c = -\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} > 0$$

setzen — ein lokales Maximum im Punkt $(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, b + c)$ und ein lokales Minimum im Punkt $(\sqrt{-\frac{a}{3}}, b - c)$.

Sie hat also drei reelle Nullstellen, wenn das Maximum und das Minimum der Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben, also wenn $|b| < c$, eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle, wenn $|b| = c$ — beispielsweise für $y = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$ —, und genau eine reelle Nullstelle, wenn $|b| > c$ (natürlich können alle numerisch, z.B. mit dem Newtonschen Näherungsverfahren, mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden).

Dieser letzte Fall ist gekennzeichnet durch die Ungleichung $b^2 > c^2 = -\frac{4a^3}{27}$ oder, äquivalenterweise,

$$27b^2 + 4a^3 > 0,$$

und in diesem Falle — der auch für $a \geq 0$ eintritt — liefert die Formel (4.9) die einzige reelle Nullstelle. Wenn $27b^2 + 4a^3 = 0$, dann liefert (4.9) noch die einfache reelle Nullstelle $x = -2 \cdot \sqrt[3]{b/2}$, und wenn $27b^2 + 4a^3 < 0$ — für CARDANO war das der *casus irreducibilis* — müssen komplexe dritte Wurzeln herhalten, um die reellen Nullstellen zu liefern — aber das ist eine andere Geschichte.

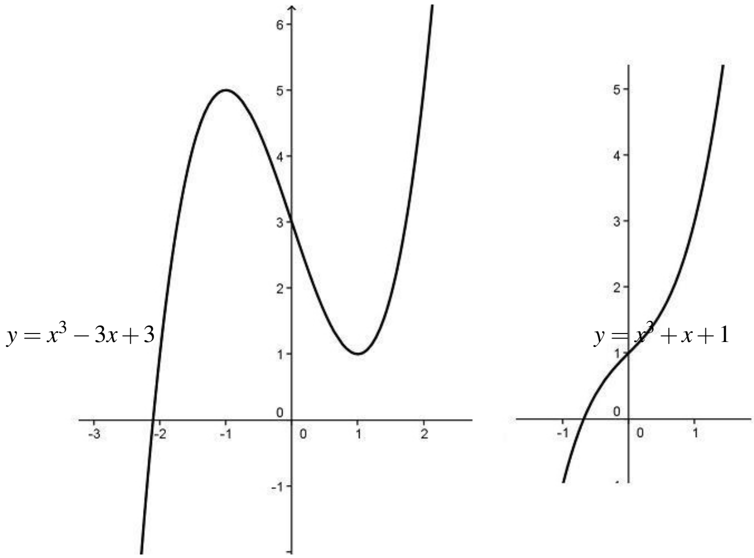


Fig. 2

Weiterführende Literatur

[1] Gindikin, S. (2007). *Tales of mathematicians and physicists*. Springer.

5. Kubische Gleichungen – eine Nachlese

GILBERT HELMBERG

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die auf CARDANO und TARTAGLIA zurückgehende Lösung der kubischen Gleichung betrachtet. Dazu wird die kubische Gleichung auf die Form

$$x^3 + px + q = 0 \tag{5.1}$$

gebracht. Wie sich dabei herausgestellt hat, spielt die sogenannte *Diskriminante* $\Delta = 27q^2 + 4p^3$ eine bedeutsame Rolle. Ist $\Delta > 0$, so besitzt die Gleichung (1) nur eine reelle Nullstelle. Ist $\Delta = 0$, so besitzt sie eine reelle und eine weitere reelle doppelte Nullstelle, und im Falle $\Delta < 0$ drei reelle Nullstellen. Im weiteren Verlauf wollen wir den Koeffizienten p konstant halten und den Parameter q variieren. Geometrisch entspricht dies der Verschiebung der kubischen Parabel in Richtung y-Achse. Drei Graphiken, die Prof. Karl Fuchs angefertigt hat, sollen den Sachverhalt veranschaulichen.

Ist $p > 0$, so besitzt die kubische Parabel $y = x^3 + px + q$ keine lokalen Extrema, wohl aber den Wendepunkt $(0, q)$. Daher wollen wir uns auf den Fall $p < 0$ beschränken. Wenn $q < 0$ dem Betrag nach genügend groß ist, so gibt es nur eine reelle Nullstelle $\alpha > 0$. Nun lassen wir den Parameter q wachsen.

Für $q = q_- = \frac{2p}{3} \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} < 0$ (siehe Bild rechts) wird erstmals

$$27(q_-)^2 + 4p^3 = 0.$$

Die Gleichung (1) hat die einfache Nullstelle

$$\alpha_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q_-}{2}}$$

und die zweifache Nullstelle

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q_-}{2}}.$$

Wenn nun q weiter wächst, so schiebt sich der Graph der kubischen Parabel nach oben. Bei $q = 0$ erreicht man $\alpha_3 = -\alpha_1$ und $\alpha_2 = 0$.

Für $q > 0$ hat man zunächst $\alpha_3 < 0$ und $0 < \alpha_2 < \alpha_1$. Wenn dann für $q = q_+ = -q_- > 0$ wieder gilt $27(q_+)^2 + 4p^3 = 0$, ist $\alpha_2 = \alpha_1$.

Für $q > q_+$ gibt es nur mehr eine reelle Nullstelle $\alpha < 0$.

Diese geometrischen Betrachtungen können arithmetisch ergänzt werden. Wir wollen zuerst den *casus irreducibilis* von CARDANO, in dem die Formel

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{6\sqrt{3}}} \tag{5.2}$$

G. Glaeser (Hrsg.), *77-mal Mathematik für zwischendurch*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3_5

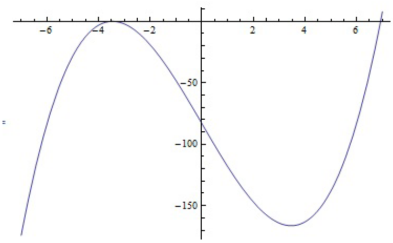


Fig. 1

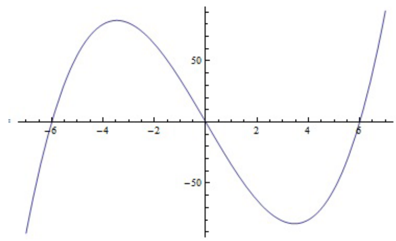


Fig. 2

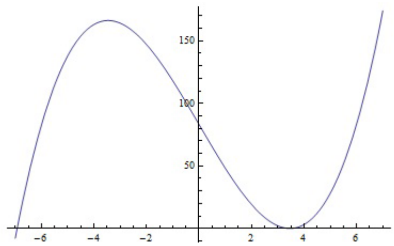


Fig. 3

eigentlich drei verschiedene reelle Nullstellen liefern sollte, näher studieren. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\begin{aligned} U &:= -\frac{q}{2} \\ V &:= \frac{\sqrt{-\Delta}}{6\sqrt{3}}, \quad \text{so} \quad \text{dass} \\ \alpha &= \sqrt[3]{U+\mathrm{i}V}+\sqrt[3]{U-\mathrm{i}V}. \end{aligned}$$

Wenn wir uns daran erinnern, dass Multiplikation zweier komplexer Zahlen die Multiplikation ihrer Absolutbeträge und die Addition der Winkel bedeutet, die ihre Ortsvektoren mit der positiven reellen Achse einschließen, hat das umgekehrt zur

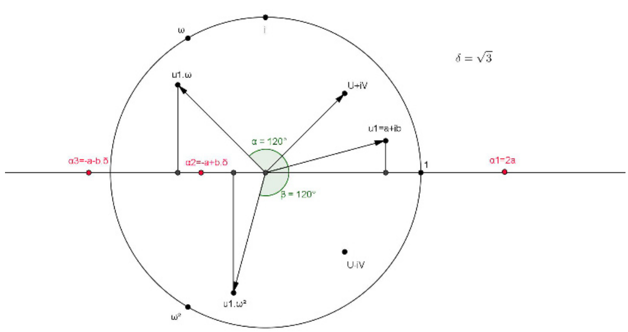


Fig. 4

Folge, dass wir eine Kubikwurzel u_1 aus einer komplexen Zahl wie $U+\mathrm{i}V$ erhalten, wenn wir aus dem Absolutbetrag $|U+iV|=\sqrt{U^2+V^2}$ die dritte Wurzel ziehen und den Winkel $\arg(U+\mathrm{i}V)$ dritteln.

Wenn wir das auch für die zu $U+\mathrm{i}V$ *konjugiert komplexe* Zahl $\overline{U+\mathrm{i}V}=U-\mathrm{i}V$ durchführen, bekommen wir mit $\overline{u_1}$ eine Kubikwurzel aus $U-\mathrm{i}V$ und $\alpha_1=u_1+\overline{u_1}$ ist eine Nullstelle von (1). In der Skizze ist das für $U+iV=0{,}512\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot 0{,}512\sin\frac{\pi}{4}$ und $u_1=0{,}8\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\cdot 0{,}8\sin\frac{\pi}{12}$ illustriert.

Aber wo sind die zwei weiteren reellen Nullstellen? Um das herauszufinden, bemühen wir die zwei komplexen Zahlen

$$\omega=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \overline{\omega}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

zusammen mit der Zahl 1 genannt *dritte Einheitswurzeln*, weil ihre dritten Potenzen 1 ergeben:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{\omega},\\ \omega^3 &= \overline{\omega}\cdot\omega=\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1.\end{aligned}$$

Alternativ liefert auch eine Anwendung des binomischen Lehrsatzes für die dritte Potenz eines Binoms

$$\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}-3\frac{1}{4}\cdot\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+3\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\mathrm{i}\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}=1.$$

Damit erhalten wir mit $u_2=u_1\cdot\overline{\omega}$ und $u_3=u_1\cdot\omega$ zwei weitere Kubikwurzeln aus $U+iV$. Die Summen $u_2+\overline{u_2}$ und $u_3+\overline{u_3}$ sind dann die gesuchten restlichen zwei reellen Nullstellen von (1).

Für $u_1=a+ib$ ergibt das $\alpha_1=2a$, $\alpha_2=-a+b\sqrt{3}$ und $\alpha_3=-a-b\sqrt{3}$ (wir können $b\geq 0$ annehmen). Da α_1, α_2 und α_3 Nullstellen von $x^3+px^2+q=0$ sind, errechnet man

$$p=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=-3a^2-3b^2,\quad q=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=6ab^2-2a^3.$$

Wer Freude am Rechnen hat, kann auch noch

$$\Delta=-4\cdot 27b^2(3a^2-b^2)^2 \tag{5.3}$$

nachrechnen!

Wir betrachten die beiden Parameter a und b in einer ab-Ebene. Die Punkte (a,b) liegen auf der Kreislinie

$$a^2+b^2=-\frac{p}{3}.$$

Für den Wert q_-, für den $\Delta = 0$ ist, hat man nach (2) den Startpunkt

$$(a,b) = \left(\sqrt[3]{-\frac{q_-}{2}}, 0\right).$$

Wenn nun der Parameter q wächst, bewegt sich der Punkt (a,b) (mit $b > 0$) auf der Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn. Im Punkt

$$(a,b) = \left(\frac{\sqrt{-p}}{2}, \frac{\sqrt{-3p}}{6}\right)$$

ist $q = 0$, also $\alpha_2 = 0$. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden $\sqrt{3}b = a$ ($\arg u_1 = \frac{\pi}{6}$ entsprechend einem Winkel von 30°). Im Schnittpunkt mit der Geraden $b = \sqrt{3}a$ ($\arg u_1 = \frac{\pi}{3}$ entsprechend einem Winkel von 60°), nämlich

$$(a,b) = \left(\frac{\sqrt{-3p}}{6}, \frac{\sqrt{-p}}{2}\right)$$

ist nach (3) wiederum $\Delta = 0$, also $q = q_+$ und somit $\alpha_3 = -a - b\sqrt{3}$ und $\alpha_2 = \alpha_1 = 2a$.

6. Schneller rechnen!

GÜNTER PILZ

Es ist ein seltsames Phänomen in der Mathematik, dass man manchmal Aufgaben einfacher oder schneller lösen kann, wenn man sie vorher komplizierter macht. Wir sehen uns zwei recht überraschende Beispiele dafür an. Eine Warnung vorab: Es handelt sich nicht darum, jemandem mit Rechenschwäche das Zusammenzählen von 19 und 23 zu erleichtern, sondern um die Erklärung von Techniken, die zweckmäßigerweise bei der Arbeit mit großen Zahlen per Computer angewandt werden können. Wir beginnen mit einer Erinnerung an die *modulare Arithmetik*.

Schneller rechnen mit ganzen Zahlen

Wenn es 20 Uhr ist und man zählt 5 Stunden dazu, dann erhält man nicht 25 Uhr, sondern 1 Uhr. Man setzt 24 und 0 Uhr gleich und beginnt dann von neuem zu zählen. In ganzen Stunden hat man also nur die Zahlen $0,1,\dots,23$ und die „Gleichungen" $24 = 0$, $25 = 1$, etc.

Beim Addieren und Multiplizieren dieser Zahlen tut man dies zunächst so wie in den ganzen Zahlen und zählt dann so oft 24 ab, bis man im Bereich $\{0,1,2,\dots,23\}$ landet. Man kann es auch so sagen: man nimmt den Rest der „gewöhnlichen" Addition bzw. Multiplikation nach Division durch 24. Man sagt, man *rechnet modulo 24*.

Dort gelten also neue Rechenregeln wie etwa $20+5 = 1$ und $15 \cdot 4 = (60) = 12$. Es gibt auch Überraschungen wie $6 \cdot 8 = 0$. Auch Subtrahieren hat Sinn: $1-5 = 20$, weil ja $20+5 = 1$ ist. Dividieren ist problematischer, weil ja z.B. $12 \cdot 3 = 12 \cdot 5 = 12 = 12 \cdot 1$ ist und man hier sicher nicht durch 12 dividieren kann, um $3 = 5 = 1$ zu bekommen. Um den Überblick nicht zu verlieren und keine Verwechslung mit den üblichen Rechenoperationen zu erzeugen, schreiben wir die obigen Rechnungen präziser an:

$$[20+5]_{24} = 1, \quad [15 \cdot 4]_{24} = 12, \quad [6 \cdot 8]_{24} = 0, \quad [1-5]_{24} = 20, \quad \text{und so weiter.}$$

Was man mit 24 tun kann, das kann man auch mit 12 machen (wie bei den Uhrzeiten im angelsächsischen Raum), oder überhaupt mit jeder anderen natürlichen Zahl n. Dann ist das Zahlensystem die Menge $\{0,1,2,\dots,n-1\}$, versehen mit den zusätzlichen Gleichungen $n = 0$, $n+1 = 1$ und so weiter. Man rechnet „modulo n".

Es gibt immer unendlich viele Zahlen, die sich modulo n auf dasselbe reduzieren, z.B.

$$[20]_{24} = [44]_{24} = [68]_{24} = [-4]_{24} = \dots \text{ und } [20]_{10} = [0]_{10} = [60]_{10} = [-10]_{10} = \dots$$

Es gilt $[a]_n = [b]_n$ genau dann, wenn $a-b$ ein ganzzahliges Vielfaches von n ist oder — was auf dasselbe hinausläuft – falls a und b bei Division durch n denselben Rest ergeben. Man sagt, b liegt dann in derselben *Restklasse* wie a modulo n.

G. Glaeser (Hrsg.), *77-mal Mathematik für zwischendurch*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61766-3_6