MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung

RESEARCH

Frederik Dilling
Felicitas Pielsticker *Hrsg.*

Mathematische Lehr-Lernprozesse im Kontext digitaler Medien

Empirische Zugänge und theoretische Perspektiven

Springer Spektrum

MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung

Reihe herausgegeben von

Ingo Witzke, Siegen, Deutschland

Oliver Schwarz, Siegen, Deutschland

MINTUS ist ein Forschungsverbund der **MINT**-Didaktiken an der **U**niversität **S**iegen. Ein besonderes Merkmal für diesen Verbund ist, dass die Zusammenarbeit der beteiligten Fachdidaktiken gefördert werden soll. Vorrangiges Ziel ist es, gemeinsame Projekte und Perspektiven zum Forschen und auf das Lehren und Lernen im MINT-Bereich zu entwickeln.
Ein Ausdruck dieser Zusammenarbeit ist die gemeinsam herausgegebene Schriftenreihe *MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung*. Diese ermöglicht Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern, genauso wie etablierten Forscherinnen und Forschern, ihre wissenschaftlichen Ergebnisse der Fachcommunity vorzustellen und zur Diskussion zu stellen. Sie profitiert dabei von dem weiten methodischen und inhaltlichen Spektrum, das MINTUS zugrunde liegt, sowie den vielfältigen fachspezifischen wie fächerverbindenden Perspektiven der beteiligten Fachdidaktiken auf den gemeinsamen Forschungsgegenstand: die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/16267

Frederik Dilling · Felicitas Pielsticker
(Hrsg.)

Mathematische Lehr-Lernprozesse im Kontext digitaler Medien

Empirische Zugänge und theoretische Perspektiven

Springer Spektrum

Hrsg.
Frederik Dilling
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen
Siegen, Deutschland

Felicitas Pielsticker
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen
Siegen, Deutschland

ISSN 2661-8060 ISSN 2661-8079 (electronic)
MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung
ISBN 978-3-658-31995-3 ISBN 978-3-658-31996-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-31996-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung der Verlage. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat : Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Es freut mich anlässlich des Erscheinens des Bandes „Mathematische Lehr-Lernprozesse im Kontext digitaler Medien – Empirische Zugänge und theoretische Perspektiven“ für die Herausgeber der Reihe „MINTUS - Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung“ kurze einleitende Worte formulieren zu können.
Den vorliegenden Band kennzeichnet, wie der Titel schon vermuten lässt, eine große Bandbreite an Zugängen zum Themenkomplex „Digitales im Mathematikunterricht“; diese reicht von Theorieartikeln zur Fundierung des Einsatzes digitaler Werkzeuge und Medien in der Mathematikdidaktik, über Anwendungsperspektiven für die Mathematiklehrerinnen- und Mathematiklehrerausbildung, bis hin zu fundierten Praxisberichten aus der Schule. Die Artikel verbindet, dass es sich um „work-in-progress“-Berichte im besten Sinne der Bezeichnung handelt – es werden Denkanstöße formuliert, Kriterien für einen sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge und Medien im Mathematikunterricht benannt und Praxisanwendungen beschrieben.
Das nun entstandene Werk ist Ausdruck einer lebendigen Auseinandersetzung mit dem Gegenstand der digitalen Bildung in der Mathematikdidaktik der Universität Siegen, getragen von einer positiven Grundeinstellung zu den Möglichkeiten die digitale Werkzeuge und Medien für den Mathematikunterricht entfalten können, aber immer in kritischer Abwägung wissenschaftlich fundiert auszuloten wann, wie und wo ein Einsatz im Sinne eines fachinhaltlichen und fachdidaktischen Mehrwerts Bedeutung entfalten kann.
Mein besonderer Dank gilt hierbei, neben den Autorinnen und Autoren, insbesondere den beiden Herausgebern Frederik Dilling und Dr. Felicitas Pielsticker die einen vielfältigen und anregenden Sammelband zusammengestellt haben. Beide haben sich in Ihren Qualifi-

kationsarbeiten sehr intensiv mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht auseinandergesetzt – unter der Maßgabe, dass diese niemals Selbstzweck sind, sondern vielmehr didaktisches Mittel zum Zweck. In Ihrer Lesart können digitale Werkzeuge Lehrerinnen und Lehrer dabei unterstützen eigenständige Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern anzustoßen und zu begleiten. Diese Wissensentwicklungsprozesse vor einem sorgsam begründeten theoretischen Hintergrund genau zu beschreiben und zu analysieren, um daraus adäquate Handlungsmöglichkeiten ableiten zu können, ist ihr Anliegen, welches sich auch deutlich in diesem Sammelband widerspiegelt.
Der vorliegende Sammelband ist damit Ausdruck der Strategie des Forschungsverbundes MINTUS Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern eine gute Möglichkeit zur Veröffentlichung erster Ergebnisse zu aktuellen Themen zu geben. Damit verbunden ist der Anspruch gerade in sich schnell entwickelnden mathematikdidaktischen Forschungsbereichen, wie dem der Digitalisierung, kurzfristig Diskussionsanlässe in die Forschungscommunity einzubringen. Der Sammelband bezieht sich damit auf die Forschungslinie MINTUS Digital, zu der weitere Schriften in der Springer MINTUS-Reihe entstehen werden.

Wir wünschen viel Freude beim Lesen, Hinterfragen, Widersprechen und in die Diskussion kommen – wenn dies anzustoßen gelänge, wäre das Anliegen des vorliegenden Bandes geglückt.

In diesem Sinne eine gute Zeit mit dem vorliegenden Werk wünscht für die Herausgeber,

Siegen, Mai 2020 Prof. Dr. Ingo Witzke

Vorwort

Digitale Medien und Werkzeuge nehmen im Mathematikunterricht aber auch im Lehramtsstudium der Mathematik zunehmend eine zentrale Rolle ein. Der Prozess der Digitalisierung schreitet stetig voran und kann als Chance zur Unterstützung als auch zur innovativen Gestaltung von mathematischen Lehr-Lernprozessen an Schule und Hochschule gesehen werden. In der letzten Zeit haben digitale Medien und Werkzeuge auch verstärkt in Bildungsstandards und Curricula des Mathematikunterrichts aller Schulstufen sowie in die Unterrichtspraxis Einzug gehalten. Lehrerinnen und Lehrer, Schülerinnen und Schüler sowie Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker stehen dabei allerdings auch vor großen Herausforderungen, die es zu bewältigen gilt. Dies kann nur durch grundlegende Forschung in diesen Bereichen sowie eine enge Verzahnung von Forschung und Praxis gelingen.
Das Ziel dieses Sammelbandes ist es, Impulse für einen sinnvollen Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge in Bezug auf mathematische bzw. mathematikdidaktische Fragestellungen zu geben. Mit der Diskussion theoretischer Grundlagen, empirischer Studien, aber auch unterrichtlicher Erfahrungen ist dieser Band insbesondere geeignet, Anregungen für die Lehramtsausbildung zu geben. Bei sowohl empirischen als auch theoretischen Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit Bezug zu digitalen Medien und Werkzeugen stehen folgende Fragen im Mittelpunkt:

- Warum sollte man digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht bzw. der Lehramtsausbildung einsetzen?
- An welchen Stellen können digitale Medien und Werkzeuge sinnstiftend eingesetzt werden?

- Worin liegen Chancen und Herausforderungen des Einsatzes digitaler Medien und Werkzeuge?

In diesem Band werden Einblicke in aktuelle fachdidaktische Forschungsprojekte zum Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht und der Lehramtsausbildung aus dem Institut für Mathematikdidaktik der Universität Siegen gegeben. Dabei wird eine große Bandbreite digitaler Medien und Werkzeuge in den Blick genommen, die unter spezifischen Fragestellungen diskutiert werden und dabei zukünftig relevante Fragen aufzeigen möchten.

Das Sammelwerk beginnt mit einem Beitrag von *Frederik Dilling, Felicitas Pielsticker und Ingo Witzke*, die den Einsatz von digitalen Medien und Werkzeugen in einem empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht beleuchten. In dem Beitrag werden vier verschiedene Medien und Werkzeuge auf der Grundlage des Konzepts der Empirischen Theorien diskutiert und Implikationen für den Umgang mit Medien und Werkzeugen im Unterricht beschrieben.
Melanie Platz beschreibt in ihrem Beitrag die Entwicklung von Lernumgebungen mit digitalen Medien. Hierzu werden Kriterien zur Erstellung und Dokumentation von Lernumgebungen aus der Literatur abgeleitet und schließlich in einem detaillierten Schema zusammengestellt.
Im Beitrag von *Jochen Geppert* werden Einsatzmöglichkeiten von dynamischer Geometriesoftware zur Entdeckung und Begründung von mathematischen Zusammenhängen in der Lehramtsausbildungen erörtert. Dazu werden sowohl theoretische Einblicke auf den Zusammenhang von digitalen Medien und dem Beweisen mathematischer Sätze gegeben als auch konkrete Praxisbeispiele zum Einsatz von GeoGebra aus einem Seminar vorgestellt.
Gero Stoffels nimmt in seinem Beitrag die Verwendung von GeoGebra-Büchern zur Wiederholung von Lerninhalten in den Blick. Dazu werden theoretische Überlegungen zu eigenverantwortlichem Üben und Wiederholen, Noticing und GeoGebra-Büchern angestellt und schließlich in einem Erfahrungsbericht am Beispiel der Linearen Algebra

konkretisiert.
Der Beitrag von *Frederik Dilling und Amelie Vogler* nimmt die Entwicklung mathematischer Zeichengeräte durch Schülerinnen und Schüler mithilfe der 3D-Druck-Technologie im Unterricht in den Blick. In einer empirischen Fallstudie werden dazu die Wissensaneignungen von drei Schülerinnen einer vierten Klasse bei der Entwicklung eines Pantographen untersucht.
Felicitas Pielsticker, Amelie Vogler und Ingo Witzke arbeiten das Thema Argumentieren im Mathematikunterricht im Kontext der 3D-Druck-Technologie auf. In einer Fallstudie werden Wissenssicherungen und -erklärungen von Schülerinnen und Schülern einer vierten Klasse bei der Entwicklung von Kantenmodellen eines Würfels analysiert.
Frederik Dilling untersucht mathematikhaltige fächerübergreifende Problemlöseprozesse am Beispiel der 3D-Druck-Technologie. Dazu wird der Problemlöseprozess von drei Oberstufen-Schülerinnen bei der Entwicklung einer sogenannten reduzierten Kupplung beschrieben und analysiert.
Im Beitrag von *Daniela Götze* wird der Einsatz von Lernvideos im Rahmen einer Veranstaltung zu Elementen der Arithmetik für Studierende des Grundschullehramts erörtert. Dazu werden sowohl wissenschaftlich fundierte Designelemente als auch konkrete Praxiserfahrungen aus Veranstaltungsevaluationen dargelegt.
Eva Hoffart diskutiert den Einsatz von Videotechnik zur Initiierung von theoriebasierten Reflexionen in der Lehramtsausbildung. In dem Beitrag werden theoretische Überlegungen zu Unterrichtsvideos und dem Reflektieren in der Lehramtsausbildung angestellt sowie konkrete Einblicke in ein Seminar an der Universität Siegen gegeben.
Der Beitrag von *Fabian Eppendorf und Birgitta Marx* betrachtet das Programmieren im Mathematikunterricht. Aus einer Praxisperspektive werden Chancen und Herausforderungen der Blockprogrammierung im Kontext von Algorithmen und Problemlösen an der Schnittstelle von Mathematik und Informatik diskutiert.
Schließlich betrachten *Anne Rahn und Frederik Dilling* den Einsatz von digitalen Medien im Rahmen von Stationenarbeiten. In einer Fall-

studie wird die Wissensentwicklung von Schülerinnen und Schülern einer dritten Klasse bei einer Stationenarbeit zum Thema Würfelgebäude in Hinblick auf die Kontextgebundenheit des entwickelten Wissens untersucht.

Wir freuen uns, wenn die in diesem Band zusammengetragenen Beiträge vielfältige Einsichten in ein Lehren und Lernen mit Bezug zu digitalen Medien und Werkzeugen im Mathematikunterricht bereithält und weitere interessante Impulse für Forschung und Praxis geben können. Wir wünschen allen Leserinnen und Lesern viel Freude und hoffen, dass wir auf nachfolgende Bände zu weiteren Themenbereichen neugierig machen können.

Siegen, Mai 2020 Frederik Dilling und Dr. Felicitas Pielsticker

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Autoren

Frederik Dilling
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Fabian Eppendorf
Lehrer für Mathematik
Sekundarschule Olpe

Jochen Geppert, Dr.
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Daniela Götze, Prof. Dr.
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Eva Hoffart, Dr.
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Birgitta Marx
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Felicitas Pielsticker, Dr.
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Melanie Platz, Prof. Dr.
Didaktik der Mathematik
Pädagogische Hochschule Tirol

Anne Rahn
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Gero Stoffels, Dr.
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Amelie Vogler
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Ingo Witzke, Prof. Dr.
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen

Empirisch-gegenständlicher Mathematikunterricht im Kontext digitaler Medien und Werkzeuge

Frederik Dilling, Felicitas Pielsticker und Ingo Witzke

Digitale Medien und Werkzeuge sind aus einem zeitgemäßen Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken. Dabei kommt der mathematikdidaktischen Forschung die Aufgabe zu, Lehr-Lern-Prozesse in den entstehenden Unterrichtskontexten (mit digitalen Medien) kritisch zu hinterfragen und Konsequenzen für ein adäquates Mathematiklehren und -lernen zu identifizieren und zu formulieren. In diesem Artikel wollen wir daher diskutieren, inwiefern die Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge einen empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht bedingen kann und inwiefern ein Arbeiten mit empirischen Objekten gefordert und gefördert werden sollte. Diskussionsleitend sind für diesen Artikel zwei Hypothesen, welche insbesondere (Schüler-) Auffassungen von Mathematik in den Blick nehmen.

1 Einleitung und Motivation

Das nachfolgend Dargestellte ist bereits im Sinne unserer theoretischen Rahmung und der dort verankerten Begriffe beschrieben, wobei wir den genutzten (erkenntnistheoretischen)Ansatz empirischer Theorien (Burscheid & Struve, 2020) in Abschnitt 2 noch einmal konkretisieren wollen, um empirische-gegenständlichen Mathematikunterricht im Kontext digitaler Medien im Weiteren diskutieren zu können.

> „Endlich kann ich sehen und anfassen, was ich in Mathematik gemacht habe.“ (Zitat der Schülerin Lisa, 13 Jahre)

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020
F. Dilling und F. Pielsticker (Hrsg.), *Mathematische Lehr-Lernprozesse im Kontext digitaler Medien*, MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung, https://doi.org/10.1007/978-3-658-31996-0_1

Das Schülerzitat wurde während einer Unterrichtsreihe aufgenommen, in der Schülerinnen und Schüler einer 8. Klasse einer Sekundarschule in NRW mithilfe der 3D-Druck-Technologie verschiedene zusammengesetzte geometrische Körper erstellt haben. Dazu wurden die geometrischen Körper zunächst mithilfe eines CAD-Programms (hier Tinkercad^{TM}) konstruiert und anschließend durch den 3D-Drucker ausgedruckt. Anschließend hat sich die Klasse mit geometrischen Begriffen wie Volumen oder Oberflächeninhalt bzgl. der erstellten geometrischen Körper auseinandergesetzt und auch Berechnungen (z.B. Körpervolumen oder Oberflächeninhalt des geometrischen Körpers) daran vorgenommen. Für die Schülerin Lisa ist es (nach unserer Beschreibung) im Kontext digitaler Medien (3D-Druck-Technologie) möglich, ihre mathematischen Begriffe an empirische Objekte, die sie „sehen und anfassen“ kann zu binden. Sie entwickelt ihre mathematischen Begriffe („was ich in Mathematik gemacht habe“) an den Referenzobjekten des Unterrichts – z.B. den 3D-gedruckten Objekten zu zusammengesetzten geometrischen Körpern. Ihre Berechnungen zum Volumen oder zum Oberflächeninhalt werden an den Referenzobjekten der Unterrichtsreihe ausgeführt. Dabei entwickeln die (mathematischen) Begriffe für die Schülerin ihre Bedeutung. Für sie sind die erstellten empirischen Objekte, die sie „sehen und anfassen“ kann, damit Teil der Mathematik – ihrer Mathematik –, wodurch gleichzeitig eine empirisch-gegenständliche Auffassung von Mathematik gefördert wird. In den Worten Hefendehl-Hebekers lässt sich festhalten:

> „Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. [...] Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist.“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S.16)

Die Frage ist, inwiefern es für die Schülerin (in der Schulmathematik) um reale Gegenstandsbereiche geht, wodurch auch der Wahrheitsbegriff ausgerichtet ist an einer gegenständlichen Überprüfbarkeit. Geschieht die Wissenssicherung für Lisa dabei beispielsgebunden und experimentell an den von ihr beschriebenen (empirischen) Objekten, die sie „sehen und anfassen kann"? Welche Rolle spielen logische Ableitungen zum Zweck der Wissensbegründung (Burscheid & Struve, 2020; Schoenfeld, 1985; Witzke, 2009)?

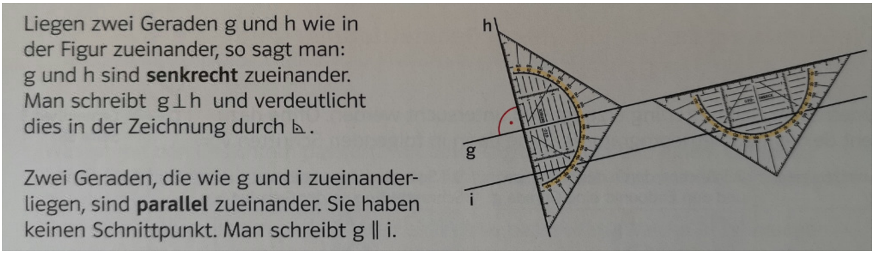
2 Theoretische Rahmung

2.1 Empirische Auffassung von Mathematik

Der Mathematikunterricht der Schule ist aus lern- und bildungstheoretischen Gründen von Anschaulichkeit und Realitätsbezug geprägt (Hefendehl-Hebeker, 2016). Mathematisches Wissen wird dabei von den Schülerinnen und Schülern nicht nur zur Beschreibung empirischer Objekte (z.B. Zeichenblattfiguren) angewendet, sondern auch auf der Grundlage dieser Objekte entwickelt. D. O. Tall (2013, S.139-140) fasst dies folgendermaßen zusammen (vgl. auch Abbildung 7):

> „Mathematical thinking builds initially through making sense of our perceptions and actions [...]. Conceptual embodiment grows from a child's experience of everyday perception and action."

Diese Entwicklung des mathematischen Wissens auf der Grundlage der Wahrnehmung und Handlungen wird am Beispiel des in Abbildung 1 dargestellten Auszuges aus dem Schulbuch Lambacher Schweizer für die 5. Jahrgangsstufe deutlich. Die relationalen Begriffe „senkrecht" und „parallel" werden an dieser Stelle des Schulbuchs mit klarem Bezug auf eine geometrische Zeichnung, bzw. Veranschaulichung von Lagebeziehungen von Dreiecken eingeführt. In der Zeichnung sind neben Ausschnitten von drei Geraden (also eigentlich Strecken!; siehe hierzu Struve (1990)) auch zwei Geodreiecke abgebildet, mit denen gezeigt wird, wie die Eigenschaften „senkrecht" und „parallel" am empirischen Objekt operational definiert bzw. überprüft werden können. Der Text dient zur Erläuterung der zu verwendenden Notationen und Begriffe. Damit werden in dem Schulbuchauszug empirische Objekte


Liegen zwei Geraden g und h wie in der Figur zueinander, so sagt man: g und h sind **senkrecht** zueinander. Man schreibt g ⊥ h und verdeutlicht dies in der Zeichnung durch ⊾.

Zwei Geraden, die wie g und i zueinander liegen, sind **parallel** zueinander. Sie haben keinen Schnittpunkt. Man schreibt g ∥ i.

Abbildung 1: Auszug aus dem Schulbuch Lambacher Schweizer für die 5. Jahrgangsstufe zum Thema senkrechte und parallele Geraden (©*Lambacher Schweizer Mathematik 5 - G9. Ausgabe Nordrhein-Westfalen* (2019, S.50).

der Zeichenblattfigur in Beziehung zueinander gesetzt.
Horst Struves Ausführungen in ähnlichen Beispielen legen nahe, dass Schülerinnen und Schüler Geometrie in einem solchen empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht nicht als abstrakte Strukturwissenschaft auffassen, sondern vielmehr als eine empirische Wissenschaft, ähnlich einer Naturwissenschaft (Burscheid & Struve, 2010; Struve, 1990) – sie entwickeln eine empirische Auffassung von Mathematik. Im Weiteren wird die folgende Definition des Begriffs der Auffassung von Mathematik (englisch: beliefs about mathematics) nach Schoenfeld (1985, S.15) genutzt:

> „Belief Systems: One's 'mathematical world view', the set of (not necessarily conscious) determinants of an individual's behavior about self, about the environment, about the topic, about mathematics."

Die einem Subjekt zugeschriebene Auffassung von Mathematik gilt als wesentlicher Einflussfaktor auf die Herangehensweise bei mathematischen Problemstellungen:

> "One's beliefs about mathematics can determine how one chooses to approach a problem, which techniques will be used or avoided, how long and how hard one will work on it, and so on. Beliefs establishes the context within which resources, heuristics, and control operate." (Schoenfeld, 1985, S.45)

In verschiedenen Studien wurden Auffassungen von Mathematik von Personengruppen untersucht und klassifiziert (u.a. Grigutsch et al., 1998; Schoenfeld, 1985; Witzke & Spies, 2016). Neben einer Vielzahl weiterer identifizierter Auffassungen kann eine Dichotomie zwischen einer formalistischen Auffassung von Mathematik („Formalismus-Aspekt"; „Logical-structural Orientation"), bei der die Mathematik auf mengentheoretischen Axiomen aufgebaut ist, und einer empirischen Auffassung von Mathematik („Empiricism"; „Empirical Orientation"), bei der die Begriffe der Mathematik in der Empirie verwurzelt sind, beschrieben werden. Die jeweils verwendeten Begriffe sind in den Studien unterschiedlich konnotiert, zeigen aber alle deutlich, dass mathematisches Wissen von Schülerinnen und Schülern sowie Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern zu verschiedenen Zwecken entwickelt und entsprechend unterschiedlich fundiert sein kann.

2.2 Empirische Theorien im Mathematikunterricht

Zur Beschreibung von Wissen, z.B. auch Wissen, welches Schülerinnen und Schüler in einem empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht entwickeln, wollen wir den erkenntnistheoretischen Ansatz der empirischen Theorien anwenden. Die Beschreibung in empirischen Theorien ermöglicht es uns, individuelle Wissensentwicklungsprozesse von Lernenden in erfahrungswissenschaftlichen Kontexten zu beobachten, entsprechend eines formalen Korpus anzuordnen und zu rekonstruieren und die mathematische Struktur zu explizieren (Burscheid & Struve, 2020; Pielsticker, 2020; Schiffer, 2019; Schlicht, 2016; Stoffels, 2020; Witzke, 2009). Damit kann dieser Ansatz insbesondere einer Beschreibung individueller Wissensentwicklungsprozesse im Kontext unterschiedlicher digitaler Medien gerecht werden. Dieser Ansatz wurde ursprünglich in der Wissenschaftsphilosophie (Strukturalismus) zur Rekonstruktion von erfahrungswissenschaftlichen Theorien entwickelt. Zu den Erfahrungswissenschaften sind unter anderem die Naturwissenschaften zu zählen, bei denen Naturphänomene beschrieben werden, um diese zu verstehen. Bei der Rekonstrukti-

on entsprechender Theorien fiel auf, dass verwendete Begriffe einiger Theorien nicht auf Beobachtungen der Empirie zurückgeführt werden konnten. Entsprechende Begriffe wurden als „theoretische Begriffe“ deklariert (Stegmüller, 1987). Sneed (1971) führte den Terminus schließlich auf die Bedingung der Gültigkeit einer Theorie zurück.
Damit stellt sich die Frage nach dem Status eines Begriffes – ein Begriff kann in unterschiedlichen empirischen Theorien einen unterschiedlichen Status haben. Die Unterscheidung zwischen sogenannten theoretischen Begriffen, deren Bedeutung sich erst innerhalb einer formulierten Theorie ergiebt, und nicht-theoretischen Begriffen, die sich auf ein empirisches Referenzobjekt beziehen oder in einer Vortheorie geklärt sind, ist wesentlich für die Beschreibung einer empirischen Theorie. Die Begriffe mit zugeordneten empirischen Referenzobjekten nennen wir im Folgenden empirische Begriffe (Burscheid & Struve, 2020).
Der Mathematikunterricht in der Schule vermittelt im Wesentlichen Elemente einer Erfahrungswissenschaft. So bezieht sich das mathematische Wissen von Kindern auf spezifische Bereiche ihrer Erfahrung mit realen Phänomenen (Burscheid & Struve, 2018). Da der Ansatz der empirischen Theorien gut mit dem Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach H. Bauersfeld (1983) vereinbar ist, wollen wir uns erfahrungsbasiertem Lernen auf diese Weise nähern und dieses beschreiben. Das Konzept der Subjektiven Erfahrungsbereiche geht davon aus, dass menschliche Erfahrungen in Sachsituationen gewonnen und situativ an diese gebunden wird. Die Speicherung erfolgt in voneinander getrennten Subjektiven Erfahrungsbereichen, welche neben der kognitiven Dimension auch Motorik, Emotionen, Wertungen und die Ich-Identität umfassen und damit ganzheitlich gedacht sind. Die Gesamtstruktur der Subjektiven Erfahrungsbereiche eines Individuums wird als „society of mind“ bezeichnet. Innerhalb dieses Systems sind die Subjektiven Erfahrungsbereiche „nicht-hierarchisch“ angeordnet, kumulativ und konkurrieren um Aktivierung. Die Wiederholung einer ähnlichen Situation führt zu einer Festigung und damit auch zu einer effektiveren Aktivierung eines Subjektiven Erfahrungsbereiches – bei Nicht-Aktivierung verblassen sie. Die Vernet-

zung von Subjektiven Erfahrungsbereichen erfolgt durch die Bildung eines übergeordneten Subjektiven Erfahrungsbereiches als Folge einer aktiven Sinnkonstruktion, in der Analogien zwischen den Subjektiven Erfahrungsbereichen gebildet werden.
Die Subjektiven Erfahrungsbereiche von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht werden durch den Umgang mit realen Phänomenen entwickelt (Burscheid & Struve, 2020). Daher entsteht eine ontologische Bindung des mathematischen Wissens mit Bezug auf gewisse Referenzobjekte. Bei der Entwicklung des Wissens verhalten sich die Lernenden im Sinne des kognitionspsychologischen Ansatzes *theory-theory* auf ähnliche Weise wie Wissenschaftler der experimentellen Naturwissenschaften (Gopnik & Meltzoff, 1997). Damit liegt es nahe, dass sie Theorien über die im Unterricht kennengelernten Phänomene bilden. Aus diesem Grund kann das wissenschaftstheoretische Konzept der empirischen Theorien auf die Beschreibung der Wissensentwicklung der Schülerinnen und Schüler angewendet werden. Das (Schüler-) Wissen kann entsprechend als empirische Theorien über die kennengelernten Phänomene rekonstruiert und beschrieben werden. Auf diese Weise werden die Einflüsse der Auffassungen der Schülerinnen und Schüler auf die Wissensentwicklung im Mathematikunterricht angemessen berücksichtigt und beschreibbar.

3 Digitale Medien und empirisch-gegenständlicher Mathematikunterricht

Der Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge findet im Mathematikunterricht seit vielen Jahren verstärkt statt. Der Begriff des Mediums verweist im Kontext von Mathematikunterricht auf die vermittelnde Rolle im Lernprozess zwischen den zu lernenden mathematischen Sachverhalten und dem durch die Lernenden entwickelten Wissen hin – also zwischen den Theorien der Lehrenden und der Lernenden. Werkzeuge sind eine spezielle Form von Medien, die auf eine Vielzahl von Sachverhalten und Problemstellungen insbesondere durch die Lernenden angewendet werden können (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015).

Digitale Medien und Werkzeuge nehmen neben den klassischen Medien und Werkzeugen im Lernprozess eine zentrale Rolle ein. Sie haben viele Gemeinsamkeiten, verändern und erweitern diese aber um wichtige Funktionen. Dies führt zu neuen Potentialen und Herausforderungen, deren Beforschung sich die Mathematikdidaktik seit einigen Jahren widmet. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife wird der Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Unterricht und in Prüfungen explizit gefordert:

> ”Das Potential dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht beim Entdecken mathematischer Zusammenhäng, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen, durch Verständnisförderung mathematischer Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten, mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen, durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten. Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.”(Kultusministerkonferenz, 2012, S.13)

Digitale Medien und Werkzeuge scheinen somit einen Fokus auf das Arbeiten mit empirischen Objekten zu legen, da sie Anlass zu experimentellen und beispielgebundenen Begründungen liefern und zudem häufig kalkülhaftes Arbeiten reduzieren. Wir wollen unseren Ausführungen daher die folgende Hypothese zugrunde legen und an vier unterschiedlichen digitalen Medien bzw. Werkzeugen explizieren:

Hypothese 1: *Der Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht hat einen Bedeutungsgewinn der Arbeit mit empirischen Objekten zur Folge und legt damit die Entwicklung einer empirischen Auffassung von Mathematik bei den Schülerinnen und Schülern nahe.*

Diese Hypothese soll in den folgenden Abschnitten an vier Beispielen aus den Bereichen Dynamische Geometriesoftware, Grafikfähiger Taschenrechner, 3D-Druck-Technologie und Virtual Reality Technologie expliziert werden.

3.1 Dynamische Geometriesoftware

Dynamische Geometriesoftware ist eines der im Mathematikunterricht am weitesten verbreiteten digitalen Werkzeuge. Die Programme simulieren die klassische Zirkel-Lineal-Geometrie und erweitern diese um eine Vielzahl verschiedener Befehle und Konstruktionen. Standardkonstruktionen wie zum Beispiel das Zeichnen paralleler Geraden durch einen Punkt oder einer Winkelhalbierenden können in einem Schritt ausgeführt und müssen nicht auf Grundkonstruktionen zurückgeführt werden. Die Systeme erlauben zudem die Einbindung von Funktionsgraphen und Kurven und können Berechnungen auf der Grundlage eines Computeralgebrasystems durchführen.
Neben diesen Funktionen, die das Konstruieren und Berechnen bestimmter Objekte ermöglichen, gibt es auch spezifische Funktionen von dynamischer Geometriesoftware, die grundlegend neue Herangehensweisen erfordern. Der so genannte „Zugmodus“ ermöglicht die Variation bereits erstellter Konstruktionen. Übrige Elemente der Konstruktion passen sich dynamisch an. So kann beispielsweise die Innenwinkelsumme an einer Klasse von Dreiecken durch Ziehen an den Ecken eines Dreiecks untersucht werden. Die „Ortslinienfunktion“ ermöglicht die Erstellung von Ortslinien während des Variierens von Punkten. Dies ermöglicht beispielsweise die Simulation eines Zeichengerätes, indem die mechanischen Abhängigkeiten als Abhängigkeiten zwischen geometrischen Objekten einer Zeichnung implementiert werden und bei Bewegung der Objekte Punkte der Ortslinie gezeichnet werden (z.B. Pantograph: https://www.geogebra.org/m/YVgGuzSg). Das so genannte „modulare Konstruieren“ mit dynamischer Geometriesoftware ermöglicht das Aufbauen auf bereits erstellten Konstruktionen, sodass eine Konstruktion die Grundlage für eine Reihe weiterer Konstruktionen bilden kann (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015).
Verwenden die Schülerinnen und Schüler dynamische Geometriesoftware, so lernen sie die Begriffe der Geometrie und anderer mathe-

matischer Teildisziplinen auf der Grundlage der geometrischen Konstruktionen im Programm. Die geometrischen Objekte bilden dabei die Referenzobjekte der empirischen Schülertheorie. Zusammenhänge zwischen den Begriffen werden durch den Umgang mit der Software erkannt und darauf aufbauend begründet. Damit dient die empirische mathematische Theorie der Schülerinnen und Schüler der Beschreibung der dynamischen Konstruktionen.
Hölzl (1995) konnte zeigen, dass die durch den Zugmodus in dynamischer Geometriesoftware auftretenden Besonderheiten die Wissensentwicklungsprozesse der Schülerinnen und Schüler entscheidend beeinflussen. So können in der DGS-Geometrie verschiedene Arten von Punkten, abhängig von ihrer Konstruktion in der virtuellen Zeichenblattebene, mit jeweils unterschiedlichen Eigenschaften unterschieden werden (siehe Abbildung 2). Sogenannte Basispunkte stehen in keiner konstruktiven Abhängigkeit zu anderen Objekten der virtuellen Ebene. Schnittpunkte hingegen können definiert werden, wenn sich beispielsweise zwei Geraden schneiden. Ihre Position kann nur durch Variation der Geraden verändert werden. Ebenso können Punkte auf einer Geraden ausgezeichnet werden und lassen sich dann auf dieser verschieben.
Die Ausführungen von Hölzl (1995) zeigen, dass die Programmierroutinen den auf dem Bildschirm gezeigten mathematischen Objekten veränderte Eigenschaften in Bezug auf die klassische Zeichenblattgeometrie zuweisen. So werden beispielsweise im Vorhinein Freiheitsgerade von Punkten festgelegt, indem sie als freie Punkte oder gebunden an Objekte definiert werden. Die verschiedenen Arten von Punkten erscheinen damit als grundlegend unterschiedlich voneinander. Ebenso sind Geraden in der Zeichenblattgeometrie per se eine Menge von Punkten auf der unter Umständen besondere Punkte ausgezeichnet werden. In dynamischer Geometriesoftware kann eine Gerade hingegen zum „Fangen“ eines Punktes dienen. Es ist davon auszugehen, dass Schülerinnen und Schüler, die die Geometrie in dynamischer Geometriesoftware kennenlernen, Begriffen wie Punkt und Gerade andere Eigenschaften zuweisen als solche, die diese in der klassischen Zeichenblattebene erfahren. Kontextuell gebunden an die Erfahrun-

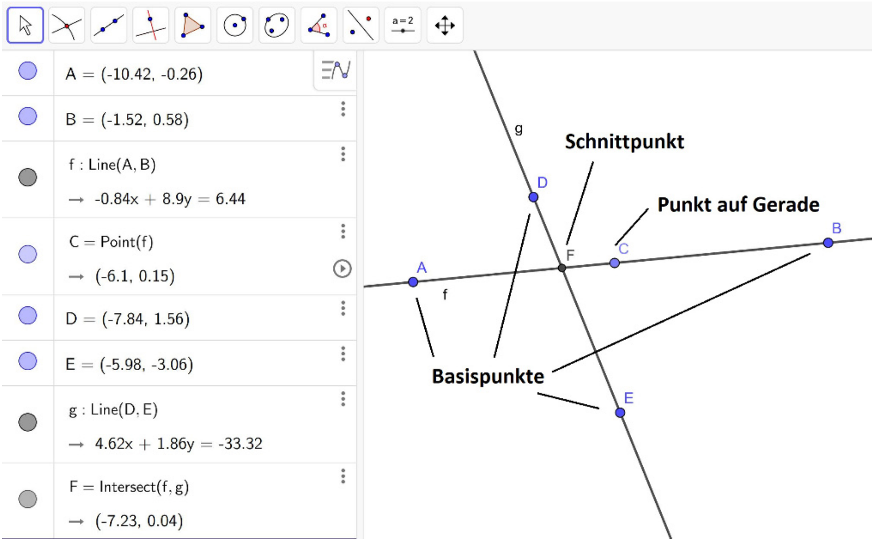


Abbildung 2: Basispunkte, Schnittpunkte und Punkte auf Objekten in dynamischer Geometriesoftware (Erstellt mit ©GeoGebra).

gen mit der Software, entwickeln die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen in unterschiedlichen subjektiven Erfahrungsbereichen mit unterschiedlichen empirischen Referenzobjekten (z.B. verschiedene Arten von Punkten) und anderen Relationen zwischen den Begriffen (z.B. Punkt auf einer Geraden) als in der Zeichenblattebene. Die Erkenntnis gewisser Strukturgleichheiten zwischen diesen subjektiven Erfahrungsbereichen (und vor allem welche Argumentationen übertragbar sind und welche nicht) muss erst erworben werden.

3.2 Grafikfähiger Taschenrechner

Grafikfähige Taschenrechner (GTR) stellen eine Erweiterung konventioneller Taschenrechner dar insofern, als dass sie neben symbolischen und numerischen Darstellungen auch die Ausgabe einfacher Grafiken ermöglichen. Beispielsweise lässt sich in der Analysis ein Funktionsgraph durch die Angabe einer Funktionsvorschrift und eines Intervalls auf relativ einfache Weise erzeugen (siehe Abbildung 3). Der grafik-