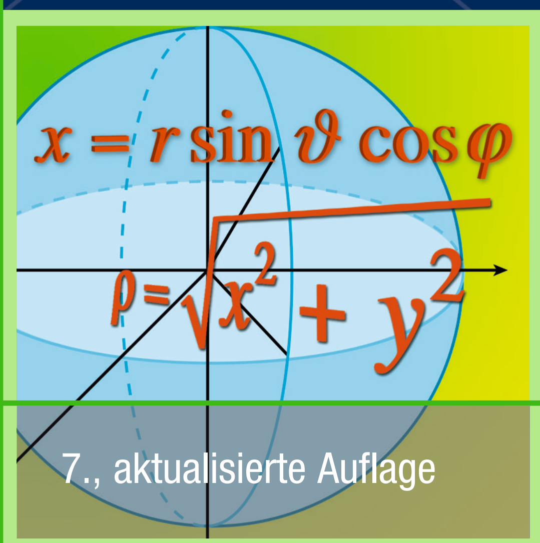
Hans-Jochen Bartsch

Kleine Formelsammlung Mathematik



7., aktualisierte Auflage

HANSER

Kleine Formelsammlung Mathematik

Hans-Jochen Bartsch

bearbeitet von Michael Sachs

7., aktualisierte Auflage

Mit 134 Bildern

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autor

Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

Bearbeiter

Prof. Dr. Michael Sachs
Hochschule München
Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik
www.hm.edu/fk06

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C014889
FSC
www.fsc.org

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-45164-3
E-Book-ISBN 978-3-446-45706-5

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova
Herstellung: Dipl.-Ing. (FH) Katrin Wulst
Satz: Dr. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Friedrich Pustet, Regensburg
Printed in Germany

Vorwort

Vorwort zur 7. Auflage

Gegenüber der 6. Auflage habe ich Druckfehler berichtigt und einige wenige Formulierungen und Zeichnungen geändert bzw. ergänzt. Ich danke allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern für die entsprechenden Hinweise.

München, im Mai 2018 Michael Sachs

Vorwort zur 6. Auflage

Mit Wissen des im Frühjahr 2008 verstorbenen Verfassers der ersten vier Auflagen dieser Formelsammlung, Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch, wurde mir vom Verlag die Fortführung des Werkes anvertraut. Nachdem ich in der fünften Auflage im Wesentlichen nur bekannte Druckfehler verbessert hatte, lege ich nun eine völlige Neubearbeitung der Formelsammlung vor. Dabei sind die Auswahl und Grobgliederung des Stoffes weitgehend gleich geblieben, ebenso habe ich die meisten Bilder und Tabellen aus den Vorgängerauflagen übernommen. Bei der Gestaltung der einzelnen Kapitel war mir ein Hauptanliegen, dass diese in sich logisch aufgebaut und weitgehend unabhängig von anderen Kapiteln lesbar sind. Erforderliche Querverweise habe ich ergänzt.

Das Buch enthält keine Beweise und auch keine Beispiele, sondern nur mathematische Definitionen, Sätze und Verfahren. Dadurch konnten Umfang und Preis niedrig gehalten werden, außerdem wird die Zulassung als Hilfsmittel in Prüfungen erleichtert, wenn keine durchgerechneten Aufgaben enthalten sind. Das Buch kann daher als Kompaktskript zur Mathematik eingesetzt werden, welches die Studierenden vom lästigen Mitschreiben von Definitionen und Sätzen befreit. Aufgaben können und sollen der einschlägigen und reichhaltigen Fachliteratur entnommen und hinzugezogen werden.

Der Stoff umfasst etwa die Gebiete der Mathematik, die an einer technischen Fakultät einer Hochschule für angewandte Wissenschaften (früher Fachhochschule) in den ersten drei bis vier Semestern gelehrt werden. Aber auch Studierende der Wirtschaftswissenschaften werden das Buch mit Gewinn als Nachschlagewerk und zur Begleitung des Unterrichts einsetzen können. Der Inhalt reicht von der Elementarmathematik der Gebiete Arithmetik, Algebra und Geometrie bis zu der Analysis mehrerer Veränderlicher, gewöhnlichen Differenzialgleichungen, den wichtigsten Integraltransformationen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik.

Um den Umfang nicht zu sprengen, habe ich nur einige wenige numerische Verfahren (z. B. Newton-Verfahren, Trapezregel, Runge-Kutta-Verfahren) aufgenommen, die im Grundstudium eine Rolle spielen. Hier sei auf die numerische Fachliteratur hingewiesen.

Mein Dank gebührt den Mitarbeiterinnen des Fachbuchverlages Leipzig, allen voran Frau Christine Fritzsch, die durch Korrekturlesen und viele Vorschläge zur Neuauflage des Buches beigetragen haben, sowie Herrn Dr. Steffen Naake für die mühevolle Arbeit des Umbruchs.

Eine Formelsammlung darf nie als abgeschlossen oder fehlerfrei gelten. Für konstruktive Hinweise aufmerksamer Leser sind Verlag und Bearbeiter daher stets aufgeschlossen und dankbar.

München, im März 2015 Michael Sachs

Inhalt

1 Logik, Arithmetik, Algebra

1.1 Mathematische Logik

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde mit dem Wahrheitswert *wahr* oder *falsch*.

Ein *aussagenlogischer Ausdruck* (eine *Aussageform*) ist eine Aussage, bestehend aus

- BOOLE*schen Variablen (Aussagenvariablen):* $\varphi, \psi, \vartheta, \varphi_1, \ldots$
- *Junktoren (logischen Zeichen):* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- technischen Zeichen

Er ist bei jeder Belegung der Variablen entweder wahr (w, 1) oder falsch (f, 0).

Eine *Wahrheitsfunktion* (BOOLEsche Funktion) F ordnet jeder Belegung der k Variablen x_1 bis x_k mit 0 oder 1 einen Wahrheitswert zu.

Allquantor (Generalisator): $\forall x$: $A(x)$ „Für alle x gilt $A(x)$.“
Existenzquantor: $\exists x$: $A(x)$ „Es gibt (wenigstens) ein x mit $A(x)$.“

1.1.1 Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen

(φ, ψ Aussageformen)

Negation, Komplement (nicht, NOT)

$\overline{\varphi} = \neg\varphi = 1$ genau dann wenn $\varphi = 0$

häufig auch Durchstreichen des Zeichens gebräuchlich, z. B. $a \neq b$ für $\neg(a = b)$

Konjunktion (*logisches Produkt*, und zugleich, AND)

$(\varphi \wedge \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi = 1$ und zugleich $\psi = 1$

auch $\varphi\psi$, $\varphi \cdot \psi$, $\varphi \& \psi$
NAND (SHEFFER*sche Funktion*), negiertes AND: $\neg(\varphi \wedge \psi)$

Disjunktion (*logische Summe*, oder, OR)

$(\varphi \vee \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi = 1$ oder $\psi = 1$ auch $\varphi + \psi$

NOR (NICOD*sche Funktion*), negiertes OR: $\varphi \overline{\vee} \psi = \overline{\varphi \vee \psi} = \varphi \downarrow \psi$

Implikation (*logische Folgerung*, wenn-dann)

$(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$ genau dann wenn $\varphi = 1$ und zugleich $\psi = 0$

Äquivalenz

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi = \psi$

Antivalenz (*ausschließliches Entweder-Oder*, exclusive-or, EXOR, XOR)

$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ genau dann wenn $\varphi \neq \psi$

Ein- und zweiwertige Wahrheitstafel

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi)$
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0

Notwendige und hinreichende Bedingung

Gilt für zwei Aussagen φ und ψ die Implikation $\varphi \Rightarrow \psi$, so heißt
φ *hinreichende Bedingung* für ψ und
ψ *notwendige Bedingung* für φ.

Im Falle $\varphi \Leftrightarrow \psi$ heißt φ *hinreichende* und *notwendige Bedingung* für ψ.

1.1.2 Rechengesetze (BOOLEsche Algebra)

kommutativ: $\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi = \psi \Leftrightarrow \varphi$
assoziativ: $\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta = \varphi \wedge \psi \wedge \vartheta$ (analog mit $\vee$ und $\Leftrightarrow$)
distributiv: $\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$ (bzw. $\wedge$ und $\vee$ vertauschen)

DE MORGANsche Regeln

$$\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi} \qquad \overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$$

Die Regeln können auf mehr als zwei Variable verallgemeinert werden.
Involutionsregel (doppelte Verneinung): $\neg(\neg\varphi) = \overline{\overline{\varphi}} = \varphi$
Tautologie (ausgeschlossenes Drittes): $\varphi \vee \neg\varphi = \varphi \vee \overline{\varphi} = 1$
Kontradiktion (Widerspruch): $\varphi \wedge \neg\varphi = \varphi \wedge \overline{\varphi} = 0$
Idempotenz: $\varphi \wedge \varphi = \varphi$
$\varphi \vee \varphi = \varphi$
neutrale Elemente 0 und 1: $\varphi \vee 0 = \varphi \quad \varphi \wedge 1 = \varphi \quad 0 = \neg 1$
Kontraposition: $(\varphi \Rightarrow \psi) = (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

1.2 Mengen

1.2.1 Grundlagen

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Sammlung von inhaltlich zusammengehörigen Objekten (*Elementen*).

Mengenbezeichnung: $A, B, M, \ldots \qquad A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (aufzählende Form)
Elementebezeichnung: $a, b, x_1, \ldots$
Zuordnung zur Menge: $x \in M$ („x Element M“) bzw. $x_i \notin M$ („x kein Element M“)
Mengenbildungsoperator: $\{x \in G | A(x)\}$
„Menge aller x Element G, für die gilt: $A(x)$.“

Angabe einer charakteristischen Eigenschaft: $B = \left\{x | x = k^3 \wedge k \in \mathbb{N}\right\}$
Zweiermenge (ungeordnete Reihenfolge): $\{a, b\}$
Paar (*geordnete* Reihenfolge): (a, b)

Stets gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$, für $a \neq b$ ist jedoch $(a, b) \neq (b, a)$.

Geordnetes Tripel: (x, y, z) *geordnetes n-Tupel*: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Leere Menge: $\emptyset, \{\}$ (enthält kein Element, auch nicht die Null)
Endliche Menge: $\{a_1, a_2, a_3\}$ *unendliche Menge:* $\{a_1, a_2, \ldots\}$

Ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ nach unten (oben) beschränkt, so hat sie mindestens eine untere (obere) *Schranke* S.

Supremum: $\sup X$, kleinste obere Schranke, *obere Grenze* der Menge X
Infimum: $\inf X$, größte untere Schranke, *untere Grenze* der Menge X

1.2.2 Mengenoperationen

Inklusion, A ist *Teilmenge* (*Untermenge*) von B (*Obermenge*)

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ echte Teilmenge: $A \subset B$

Gleichheit

$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$ $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

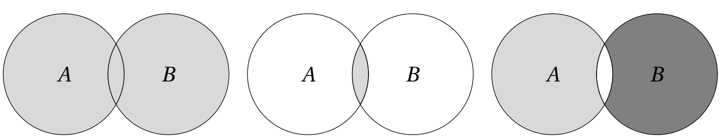
Vereinigung, Disjunktion

$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Durchschnitt, Konjunktion

$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

A und B sind *disjunkt* (elementefremd): $A \cap B = \emptyset$



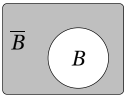
Vereinigung $A \cup B$ Durchschnitt $A \cap B$ $A \setminus B$ Differenzen $B \setminus A$

Differenz zweier Mengen

$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$A \setminus B \neq B \setminus A$ $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

Komplement einer Menge B in Bezug auf Grundmenge G (Bild)



$$\overline{B} := G \setminus B = \{x \in G | x \notin B\}$$

Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von A

$$\boldsymbol{P}(A) := \{X | X \subseteq A\} \qquad A, \varnothing \in \boldsymbol{P}(A)$$

kartesisches Produkt zweier Mengen (Menge von geordneten Paaren)

$$A \times B := \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\} \qquad \text{für } A \neq B \text{ gilt } A \times B \neq B \times A$$

Produktmenge, Menge aller n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$: $M_1 \times \cdots \times M_n \qquad x_i \in M_i$
Mengenpotenz: $M^n := \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n} \qquad n \geq 1$

1.2.3 Rechenregeln für Mengen

(G Grundmenge)

Reflexive Beziehung: $A \subseteq A \qquad \overline{\overline{A}} = A$
Komplementgesetze: $\overline{G} = \varnothing \quad \overline{\varnothing} = G \quad \overline{A} \cap A = \varnothing \quad \overline{A} \cup A = G$
Transitive Beziehung: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
Teilmengenbeziehung: $A \cap B \subseteq A \cup B, \quad A \setminus B \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq A, \quad A \subseteq G$
Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ desgl. mit $\cup$
Absorptionsgesetze: $A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$
Distributivgesetze: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
DE MORGAN*sche Regeln:* $\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2} \qquad \overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$

Produktbeziehungen

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B) \qquad C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$$

Es gilt: $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \qquad A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

1.2.4 Relationen

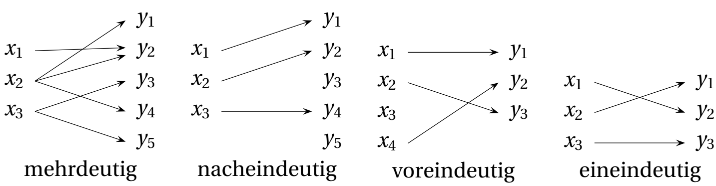
Eine *Relation* R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$: $R \subseteq A \times B$

Infix-Schreibweise: xRy für $(x, y) \in R$
Definitionsbereich sind alle Elemente x, für die ein y mit xRy existiert.

Mächtigkeit

Die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* einer Menge ist ihre Elementeanzahl. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive (eineindeutige) Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt.

Eine Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich* oder kurz *abzählbar*.



1.2.5 Zahlensysteme

Heute gebräuchliche *Zahlensysteme* sind *polyadische* oder *Positionssysteme*.

Dualsystem (*Zweiersystem, dyadisches System*)
Grundziffern: $a_k \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$ *Stellenwert*: Potenzen von 2

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 2^k = \pm\left(a_n 2^n + \ldots + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + \ldots\right)$$

Dezimalsystem (*dekadisches System*)
Grundziffern: $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ *Stellenwert:* Potenzen von 10

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k = \pm\left(a_n 10^n + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \ldots\right)$$

Endlicher Dezimalbruch: $\exists a_k \neq 0$ für $k < 0$, alle folgenden Ziffern sind Null
Periodischer Dezimalbruch: unendliche Wiederholung einer Ziffernfolge

Normalisierte Gleitkommadarstellung einer reellen Zahl

$a = \mp m \cdot 10^k \quad a \in \mathbb{R}$

Mantisse: $1 \leq m < 10$ (auch $0{,}1 \leq m < 1$ ist üblich), *Exponent*: $k \in \mathbb{Z}$
Hat die Mantisse t *tragende Ziffern*, heißt sie t-*stellig*.

Übersicht über häufig verwendete Zahlensysteme

(*BCD-Code:* Jede Ziffer einer Dezimalzahl wird einzeln binär codiert)

dezimal	dual	BCD	oktal	hexadezimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F
16	10000	0001 0110	20	10
usw.	⋮	⋮	⋮	⋮

1.3 Menge der reellen Zahlen

1.3.1 Standard-Zahlenmengen

Menge der nichtnegativen ganzen (natürlichen) Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Herausnahme der Zahl 0 durch Anfügen des Sternchens:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Kardinalzahlen: Anzahl der Elemente einer abzählbaren Menge
Ordinalzahlen: Stelle eines Elements in einer geordneten Menge

Menge der Primzahlen
Eine *Primzahl* p ist eine natürliche Zahl ≥ 2, die ohne Rest nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar ist:

$$\mathbb{P} = \left\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\right\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Sind a und b *teilerfremde ganze Zahlen*, d. h. ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1, so spricht man von der *Normaldarstellung*.
$\mathbb{Q}$ ist *abzählbar*, d. h. es gibt genauso viele rationale Zahlen wie natürliche.
Rationale Zahlen liegen überall dicht auf der *Zahlengeraden*. Rationale Zahlen sind

- *Brüche von ganzen Zahlen*
- *endliche Dezimalbrüche*
- *unendliche periodische Dezimalbrüche*

Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{Menge der irrationalen Zahlen}$$

Irrationale Zahlen sind nichtperiodische, nicht abbrechende Dezimalbrüche, z. B. π, $\sqrt{2}$, e. Als Näherungswerte benutzt man endliche Dezimalbrüche, etwa $\pi \approx 3{,}1415927$.

Menge der *positiven* reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar (*überabzählbar*). Die reelle Zahlengerade und $\mathbb{R}$ sind *gleichmächtig*.

Anordnungsaxiome für reelle Zahlen ($a, b, c \in \mathbb{R}$)
Stets gilt eine der drei Beziehungen zwischen zwei reellen Zahlen a und b:

$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a > b$$

Für $a, b > 0$ gilt

$$a + b > 0 \quad \text{und} \quad ab > 0$$

Daraus: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (*Transitivität*)

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (*Monotonie der Addition*)

$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ (*Monotonie der Multiplikation*)

Intervalle

Offenes Intervall: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Abgeschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Halboffene Intervalle: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Statt (a, b) ist auch die Schreibweise $]a, b[$ gebräuchlich.

1.3.2 Grundoperationen für reelle Zahlen

Klammern auflösen, Ausklammern, Produkte von Summen

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

$$ac + bc = c(a + b) \qquad ac - bc = c(a - b) \qquad -ac - bc = -c(a + b)$$

$a(b - c) = ab - ac$ „Punkt vor Strich“

Bruchrechnung

Echter Bruch: $\frac{a}{b} < 1$ mit $0 < a < b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ *Gemeiner Bruch:* für $b \neq 10^n$

Stammbruch: $\frac{1}{a}$ (*Kehrwert* von a) *Kehrwert* von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$ $a, b \neq 0$

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ *Kürzen:* $\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c}$ $b, c \neq 0$

Addieren/Subtrahieren: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ $b, d \neq 0$

(*Hauptnenner bd*)

Multiplizieren: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dividieren: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} \quad b, c, d \neq 0$

Nullsetzen: $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)
Produkt der Potenzen der *Primfaktoren* mit den *höchsten* Exponenten der beteiligten Zahlen bzw. Variablen (z. B. bei Hauptnennerbestimmung).

Größter gemeinsamer Teiler (ggT)
Größte natürliche Zahl, die gemeinsamer Teiler aller beteiligten Zahlen ist.

Polynomdivision

- Ordnen von Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen der Variablen
- 1. Glied Dividend durch 1. Glied Divisor ergibt 1. Glied Quotient
- Rückmultiplikation mit Divisor
- Subtraktion, bis die Differenz null wird bzw. ein Rest bleibt

Proportionen, Verhältnisgleichungen ($b, d \neq 0$)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ „über Kreuz multiplizieren“

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a = k \cdot c \wedge b = k \cdot d$

k Proportionalitätsfaktor, $k \in \mathbb{R}$

Direkte Proportionalität (Graph: *Gerade*): $y \sim x \Leftrightarrow y = kx$

Indirekte Proportionalität (Graph: *Hyperbel*): $y \sim \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y = k\dfrac{1}{x}$

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel

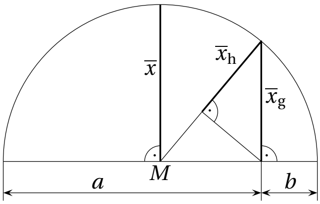
$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

Mittlere Proportionale, geometrisches Mittel ($a, b \geq 0$)

$$\bar{x}_{\mathrm{g}} = \sqrt{ab}$$

Harmonisches Mittel

$$\overline{x}_{\mathrm{h}} = \frac{2ab}{a+b}$$



Ungleichung der Mittelwerte:
Für $a, b > 0$ gilt $\overline{x}_{\mathrm{h}} \leq \overline{x}_{\mathrm{g}} \leq \overline{x}$. Gleichheit herrscht genau dann, wenn $a = b$ ist.

Näherung, Rundungsregeln
Abrunden: Ziffer a_i bleibt, wenn die folgende Ziffer $a_{i+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
Aufrunden: Ziffer a_i wird um 1 erhöht, wenn $a_{i+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$
absoluter Fehler ε: $|\varepsilon| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-i}$, *$i$ sichere (gültige) Stellen/Dezimalen*

Betrag einer reellen Zahl

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln: $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
$|x + y| \leq |x| + |y|$ *Dreiecksungleichung*

Signum einer reellen Zahl

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln: $\operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$
$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

Summen- und Produktzeichen ($i, m, n \in \mathbb{Z}$)

$m \leq n$: $$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n \qquad \prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \ldots \cdot x_n$$

i Laufvariable, Index

$m > n$: $\sum_{i=m}^{n} x_i := 0$ (*leere Summe*) $\prod_{i=m}^{n} x_i := 1$ (*leeres Produkt*)

Regeln: $\sum_{i=m}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=m}^{n} y_i$ $\prod_{i=m}^{n} (x_i \cdot y_i) = \prod_{i=m}^{n} x_i \cdot \prod_{i=m}^{n} y_i$

$\sum_{i=m}^{n} c x_i = c \sum_{i=m}^{n} x_i$ $\prod_{i=1}^{n} c x_i = c^n \prod_{i=1}^{n} x_i$

$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$ $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$

Im Allgemeinen ist aber $\sum_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=m}^{n} a_i \cdot \sum_{i=m}^{n} b_i$.

1.3.3 Potenzen, Wurzeln

Natürliche Exponenten ($a \in \mathbb{R}$)

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

a Basis, n Exponent

Speziell $0^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}^*$, aber 0^0 ist nicht definiert.

Gebrochene Exponenten ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}, \text{ wobei } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$
$$a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

a Radikand, n Ordnung der Wurzel

Negative Exponenten ($a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{-x} := \frac{1}{a^x}$$ speziell *Kehrwert:* $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Wurzelgesetze ($m, n \in \mathbb{N}$)

$\sqrt[n]{0} = 0$ $\sqrt[n]{1} = 1$ $\sqrt[n]{a} > 1$ falls $a > 1$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$

Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kurz $\sqrt{a}$.

Beachte: $\sqrt{a}$ ist stets nichtnegativ, also z. B. $\sqrt{4} = 2$, und nicht -2 oder gar ± 2.

Potenzgesetze $(x, y \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}_{>0})$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x\cdot y}$

1.3.4 Logarithmen

b Basis, $b \in \mathbb{R}_{>0}, b \neq 1$
a Numerus, Logarithmand, $a \in \mathbb{R}_{>0}$
x Exponent, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a}$

In Worten: Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige reelle Zahl x, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

Regeln:

$b^{\log_b x} = x \qquad \log_b b^x = x$

$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1$

Logarithmengesetze $(u, v \in \mathbb{R}_{>0})$

$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v \qquad \log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$

$\log_b \dfrac{u}{v} = -\log_b \dfrac{v}{u} \qquad \log_b \dfrac{1}{v} = -\log_b v$

$\log_b u^c = c \log_b u,\ c \in \mathbb{R} \qquad \log_b \sqrt[n]{u} = \dfrac{1}{n} \log_b u \qquad n \geq 2$

Dekadische (gemeine, Briggssche) Logarithmen

$\lg a := \log_{10} a$

$\boxed{\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a} \qquad \lg 10^x = x \qquad 10^{\lg a} = a \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0$

Gleitkommadarstellung einer reellen Zahl: $a = m \cdot 10^k$ mit $m \in [1;10)$,
daraus $\lg a = \lg m + k$ mit $\lg m \in [0;1)$, $a > 0$
m Mantisse, k $\in \mathbb{Z}$ *Kennzahl*

Natürliche Logarithmen

$\ln a := \log_e a$

$\boxed{\ln a = x \Leftrightarrow e^x = a}$ $\quad \ln e^x = x \quad e^{\ln a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$

$a^z = e^{z \ln a} \quad a > 0, z \in \mathbb{R}$

Basis: $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ EULER*sche Zahl*

Zweierlogarithmen, binäre Logarithmen

$\operatorname{lb} a := \log_2 a$

$\boxed{\operatorname{lb} a = x \Leftrightarrow 2^x = a}$ $\quad \operatorname{lb} 2^x = x \quad 2^{\operatorname{lb} a} = a \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$

Basiswechsel der Logarithmensysteme ($b, c \in \mathbb{R}_{>0}, b, c \neq 1$)

$\boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}}$ $\quad$ speziell $c = 10$: $\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$

1.3.5 Binomischer Satz

Fakultät (rekursive Definition, $n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{für } n \geq 1 \end{cases}}$$

Für $n \geq 1$ ist $n!$ (lies: „n-Fakultät") also gleich dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Speziell: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ usw.

Binomialkoeffizient ($n, k \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}}$$ (lies: „n über k" oder „k aus n")

Für $1 \le k \le \frac{n}{2}$ effiziente Berechnung möglich durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 1},$$

für $\frac{n}{2} < k \le n$ verwende man zunächst den *Symmetriesatz*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{speziell} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Rekursionsformel zur Berechnung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

Additionssatz:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pascalsches Dreieck zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

$n = 0$					1					Zeilensumme	2^0
$n = 1$				1		1					2^1
$n = 2$			1		2		1				2^2
$n = 3$		1		3		3		1			2^3
$n = 4$	1		4		6		4		1		2^4

Binomische Formeln

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

Allgemeiner binomischer Satz für natürliche Exponenten

$(n \in \mathbb{N},\ a,\ b \in \mathbb{R})$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1.4 Menge der komplexen Zahlen

1.4.1 Grundlagen

$$\mathbb{C} = \{z = a + \mathrm{j} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{j}^2 = -1\}$$

Realteil: $\operatorname{Re} z = a$
Imaginärteil: $\operatorname{Im} z = b$

In $\mathbb{C}$ ist im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ *keine Ordnungsrelation* erklärbar.
$\mathbb{C}$ ist *nullteilerfrei*: Aus $z_1 \cdot z_2 = 0$ folgt stets $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$.

Imaginäre Einheit: $0 + \mathrm{j} \cdot 1 = \mathrm{j}$ mit $\mathrm{j}^2 = -1$ Reine Mathematik: i
Rein imaginäre Zahl: $0 + \mathrm{j} \cdot b = \mathrm{j}b$
Reelle Zahl: $a + \mathrm{j} \cdot 0 = a$

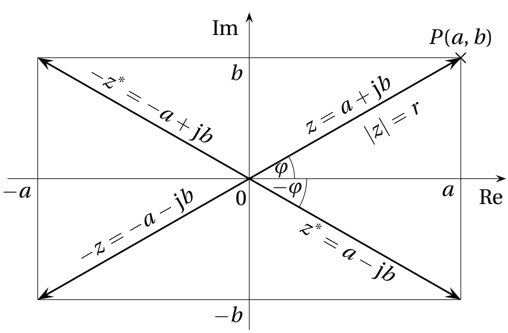
Damit ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen in der GAUSSschen Zahlenebene

Die komplexe Zahl $a + \mathrm{j}b$ wird dargestellt durch einen Pfeil (Vektor, *Zeiger*) vom Nullpunkt der xy-Ebene zum Punkt $P(a, b)$.

Konjugiert komplexe Zahl z^*, $\overline{z}$

$$z = a + \mathrm{j}b \Rightarrow z^* = \overline{z} = a - \mathrm{j}b$$



$$a = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad b = \frac{1}{2\mathrm{j}}(z - z^*)$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* \quad (z^*)^* = z$$

$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \qquad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$

Betrag (Modul)

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Argument einer komplexen Zahl (Polarwinkel, Phase)

Das Argument einer komplexen Zahl z ist nur für $z \neq 0$ definiert. Es ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Zeiger von z:

$\arg z = \varphi$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$ (Quadrant beachten!)

Nebenwerte: $\arg_k z = \arg z + k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}^*$

Potenzen der imaginären Einheit

$\mathrm{j}^0 = \mathrm{j}^{-4} = 1, \quad \mathrm{j}^1 = \mathrm{j}^{-3} = \mathrm{j}, \quad \mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^{-2} = -1, \quad \mathrm{j}^3 = \mathrm{j}^{-1} = -\mathrm{j}$

Allgemein: $\mathrm{j}^{4k} = 1, \quad \mathrm{j}^{4k+1} = \mathrm{j}, \quad \mathrm{j}^{4k+2} = -1, \quad \mathrm{j}^{4k+3} = -\mathrm{j}, \qquad k \in \mathbb{Z}$

1.4.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form

$z = a + \mathrm{j}b = \operatorname{Re} z + \mathrm{j} \operatorname{Im} z \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Trigonometrische Form

$z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \qquad r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$

Polarform

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

EULERsche Formel

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \qquad \varphi \in \mathbb{R}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ ist also diejenige komplexe Zahl, deren Betrag 1 und deren Argument φ ist.

Speziell:

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\cdot 2\pi} = 1 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k+1)\cdot\pi} = -1$

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{j} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\pi}{2}} = \mathrm{j}^n$

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$

Periode der komplexen Exponentialfunktion

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + k\cdot 2\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad k \in \mathbb{Z}$