

Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

RESEARCH

Daniel Thurm

Digitale Werkzeuge im Mathematik- unterricht integrieren

Zur Rolle von Lehrerüberzeugungen
und der Wirksamkeit von
Fortbildungen



Springer Spektrum

Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Bärbel Barzel, Essen, Deutschland

Andreas Büchter, Essen, Deutschland

Florian Schacht, Essen, Deutschland

Petra Scherer, Essen, Deutschland

In der Reihe werden ausgewählte exzellente Forschungsarbeiten publiziert, die das breite Spektrum der mathematikdidaktischen Forschung am Hochschulstandort Essen repräsentieren. Dieses umfasst qualitative und quantitative empirische Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik vom Elementarbereich über die verschiedenen Schulstufen bis zur Hochschule sowie zur Lehrerbildung. Die publizierten Arbeiten sind Beiträge zur mathematikdidaktischen Grundlagen- und Entwicklungsforschung und zum Teil interdisziplinär angelegt. In der Reihe erscheinen neben Qualifikationsarbeiten auch Publikationen aus weiteren Essener Forschungsprojekten.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13887>

Daniel Thurm

Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht integrieren

Zur Rolle von Lehrerüberzeugungen
und der Wirksamkeit von
Fortbildungen

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Bärbel Barzel

 Springer Spektrum

Danksagung

Mein Dank gilt...

...meiner Betreuerin Bärbel Barzel, die mich in jeglicher Hinsicht unterstützte und mir viel Vertrauen entgegenbrachte. Ihre fachliche Expertise kombiniert mit der Fähigkeit, immer den Menschen in den Mittelpunkt zu stellen, wird für mich immer Vorbild sein.

...meiner Zweitgutachterin Katrin Rolka für die Begutachtung der Arbeit.

... Andreas Büchter, der immer ein offenes Ohr für Fragen und Probleme hatte. Seine Ideen und Rückmeldungen waren für das Gelingen dieser Arbeit sehr wertvoll.

...der gesamten „Arbeitsgruppe Barzel“ sowie den weiteren Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern in der Mathematikdidaktik der Universität Duisburg-Essen für die stets sehr kollegiale Arbeitsatmosphäre. Besonderer Dank gilt dabei Anne Möller für die vielen fachlichen Diskussionen und das kritische Lesen so mancher Textentwürfe.

...Marcel Klinger. In der Zeit meiner Promotion teilten wir uns nicht nur ein Büro, sondern waren auch in der wissenschaftlichen Arbeit eng verbunden. In den vier Jahren habe ich nicht nur einen fachlich sehr versierten Kollegen an meiner Seite gehabt, sondern auch einen guten Freund gewonnen.

...Okan Kaplan. Uns einten die Begeisterung für die Umsetzung diverser mathematikdidaktischer Hobbys abseits der Promotion sowie viele gemeinsame private Interessen. Auf diese Weise entstand eine enge Freundschaft die meine Promotionszeit maßgeblich bereicherte.

...meiner Familie und meinen Freunden, die mich auf vielfältige Art und Weise unterstützt haben. Besonderer Dank gilt meinen Eltern Marika Thurm (geborene Hatschek) und Siegfried Thurm sowie meinem Bruder Markus Thurm – ihr seid ein Rückhalt, der das Schreiben dieser Arbeit erst ermöglicht hat.

Essen im November 2018

Daniel Thurm

Geleitwort

Digitalisierung im Unterricht ist hochaktuell eine der zentralen Herausforderungen in der Bildungslandschaft, doch keineswegs neu. Seit mehr als 25 Jahren wird der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge wie Computeralgebra und Funktionenplotter diskutiert. Erkenntnisse belegen, dass Medien dieser Art beim Lernen von Mathematik eine effiziente Hilfestellung für den Erwerb konzeptuellen Wissens leisten können. Dabei ist unumstritten, dass dieses Potenzial nur bei adäquater Aufgaben- und Unterrichtsgestaltung zur Entfaltung gebracht werden kann. Deshalb sind Professionalisierungsmaßnahmen für Lehrkräfte von außerordentlicher Bedeutung.

Trotz der eindeutigen Forschungslage bleibt der Einsatz digitaler Werkzeuge in der Schulpraxis weit hinter den erhofften Erwartungen zurück. Und dies, obwohl die curricularen Rahmenbedingungen einen durchgängigen Einsatz nun seit mehr als 10 Jahren verbindlich fordern, die technischen Voraussetzungen mit der leichteren Verfügbarkeit der Software deutlich verbessert wurden und die Anzahl entsprechender Unterrichtsvorschläge stetig wächst. Die Gründe für die Diskrepanz zwischen curricularen Anforderungen und tatsächlicher Praxis sind deshalb komplexer als angenommen. Lehrkräfte stehen vor der Herausforderung, die eigenen Routinen beim Vorbereiten, Planen und Durchführen von Unterricht zu reflektieren und zu verändern.

Die Komplexität der Ursachen besser zu verstehen, ist ein Anliegen der Arbeit von Daniel Thurm. Er untersucht das Gefüge aus Selbstwirksamkeitsüberzeugungen von Lehrkräften, deren Überzeugungen zum Einsatz von Technologie, ihre epistemologischen Überzeugungen und den Einsatz digitaler Werkzeuge im Unterricht. Neben dieser Querschnittsperspektive ist der Erkenntnisgewinn zur Wirksamkeit von Fortbildungen ein weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit. Für diese Längsschnittbetrachtung hat Daniel Thurm eine Fortbildungsreihe zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge im Mathematikunterricht der Oberstufe untersucht, die über ein

halbes Jahr lang mit vier Präsenztagen und Online-Angeboten als Kooperation des DZLM (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik) mit dem Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen durchgeführt wurde.

Herr Thurm baut seine Studie auf einer sehr umfassenden gründlichen theoretischen Fundierung auf, wodurch ihm Weitblick und Tiefenblick zugleich gelingen. Die querschnittliche Untersuchung verweist sehr deutlich auf die hohe Bedeutung der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, die mit einem häufigeren Unterrichtseinsatz digitaler Werkzeuge, stärker konstruktivistischen Lehr-Lern-Überzeugungen und einem dynamischen Bild von Mathematik assoziiert sind. Neben interessanten Einzelerkenntnissen der Untersuchung zur Wirksamkeit von Fortbildungen ist vor allem markant, dass sich aufgrund einer latenten Profilanalyse vier Gruppen von Lehrkräften herauskristallisieren, je nach Ausprägung der beiden Dimensionen „technologieaffin oder – avers“ und „seltener oder häufiger Einsatz“.

Insgesamt hat Herr Thurm eine Arbeit auf sehr hohem wissenschaftlichen Niveau vorgelegt mit einer gründlichen theoretischen Fundierung und der Generierung eines Testinstruments auf der Grundlage einer inhaltlich wie statistisch überzeugenden Entwicklungsarbeit, einem systematischen und gewissenhaften Einsatz wissenschaftlicher Methodologie, der Transparenz seines Vorgehens und einer kritischen abschließenden Reflexion. Mit dem entstandenen Testwerk zur Erfassung von Lehrerüberzeugungen im Bereich der Digitalisierung und der Einsatzhäufigkeit digitaler Werkzeuge sowie den Forschungsergebnissen zur Wirksamkeit von Fortbildungen leistet Herr Thurm einen außerordentlich wertvollen und wichtigen Beitrag, um die aktuellen Herausforderungen in der Lehrerprofessionalisierung zum Technologieeinsatz mit fundierten Informationen zu bereichern.

Essen im Juli 2019

Prof. Dr. Bärbel Barzel

Inhaltsverzeichnis

A)	Einleitung	1
	1 Motivation des Forschungsinteresses	1
	2 Ziele der Arbeit	7
	3 Struktur der Arbeit	8
B)	Theoretischer Hintergrund.....	9
	4 Chancen und Risiken digitaler Werkzeuge	9
	4.1 Digitale Mathematikwerkzeuge	11
	4.2 Unterstützung von Repräsentationswechselln	12
	4.3 Unterstützung entdeckenden Lernens	31
	4.4 Unterstützung von Modellierungsprozessen.....	40
	4.5 Entlastung von kalkülhaftem Arbeiten	45
	4.6 Empirische Evidenz zum Einsatz digitaler Werkzeuge	60
	5 Zur Rolle von Lehrerüberzeugungen	63
	5.1 Auf die Lehrkraft kommt es an.....	64
	5.2 Zu Begriff und Rolle von Lehrerüberzeugungen.....	68
	5.3 Die Rolle technologiebezogener Überzeugungen	77
	5.4 Die Rolle epistemologischer Überzeugungen	84
	5.5 Die Rolle der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	92
	6 Fortbildungen zu digitalen Werkzeugen	100
	6.1 Zur Forderung nach Fortbildungen.....	100
	6.2 Wirkebenen von Fortbildungen	104
	6.3 Gestaltungsprinzipien von Fortbildungen.....	107
	6.4 Wirksamkeit von Fortbildungen	113
C)	Konzeption und Durchführung der Fortbildung	125
	7 Rahmenbedingungen.....	125
	8 Inhaltliche Gestaltung der Fortbildungsmodule.....	127
	8.1 Modul A – Einstieg.....	127

8.2 Modul B – Modellieren mit digitalen Werkzeugen.....	130
8.3 Modul C – Unterrichtsprozesse mit digitalen Werkzeugen....	133
8.4 Modul D – Digitale Werkzeuge in Prüfungssituationen.....	136
9 Umsetzung der Gestaltungsprinzipien	139
D) Fragestellung & Hypothesen der Arbeit	145
10 Forschungsfragen.....	145
11 Hypothesen	148
E) Untersuchungsdesign und Methoden	153
12 Untersuchungsdesign	153
13 Entwicklung der Erhebungsinstrumente	156
13.1 Tests und Testgütekriterien.....	157
13.2 Methoden der Testentwicklung	160
13.3 Deskriptivstatistische Evaluation.....	163
13.4 Konfirmatorische Faktorenanalyse.....	164
14 Querschnittliche Analyse	167
14.1 Korrelationsanalyse	169
14.2 Latente Profilanalyse	171
15 Bestimmung der Wirksamkeit der Fortbildung	174
15.1 Das Roy-Rubin-Model zur Bestimmung von Effekten	174
15.2 Propensity-Score-Matching	177
15.3 Bestimmung der Treatmenteffekte	182
F) Entwicklung der Erhebungsinstrumente	187
16 Fragebogen zu Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	188
16.1 Fragebogenentwicklung.....	188
16.2 Empirische Überprüfung	193
17 Fragebogen zu technologiebezogenen Überzeugungen.....	196
17.1 Fragebogenentwicklung.....	196
17.2 Empirische Überprüfung	202

18 Fragebogen zur Einsatzhäufigkeit digitaler Werkzeuge	208
18.1 Fragebogenentwicklung	208
18.2 Empirische Überprüfung	211
19 Fragebogen zu epistemologischen Überzeugungen	215
19.1 Fragebogen der TEDS-M-Studie	215
19.2 Empirische Überprüfung	219
G) Querschnittliche Ergebnisse	225
20 Beschreibung der Stichprobe	227
21 Geschlecht und Unterrichtserfahrung	229
22 Überzeugungen	234
22.1 Epistemologische Überzeugungen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen.....	234
22.2 Epistemologische und technologiebezogene Überzeugungen.....	235
22.3 Technologiebezogene Überzeugungen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen.....	238
23 Einsatzhäufigkeit.....	240
23.1 Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Einsatzhäufigkeit.....	240
23.2 Epistemologische Überzeugungen und Einsatzhäufigkeit.....	241
23.3 Technologiebezogene Überzeugungen und Einsatzhäufigkeit	243
24 Latente Profilanalyse zum Einsatz digitaler Werkzeuge	245
25 Zusammenfassung.....	249
H) Ergebnisse zur Wirksamkeit der Fortbildung.....	253
26 Beschreibung der Stichprobe	253
27 Durchführung des Propensity-Score-Matchings.....	259
28 Bestimmung des Fortbildungserfolges	263
28.1 Akzeptanz der Fortbildung	263
28.2 Effekte bezüglich Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	264
28.3 Effekte bezüglich technologiebezogener Überzeugungen.....	266

28.4	Effekte bezüglich epistemologischer Überzeugungen.....	269
28.5	Effekte bezüglich der Einsatzhäufigkeit.....	271
29	Zusammenfassung.....	274
I)	Interpretation und Ausblick.....	277
30	Zur Entwicklung der verwendeten Erhebungsinstrumente.....	278
31	Diskussion der querschnittlichen Ergebnisse.....	281
31.1	Die Rolle des Geschlechts.....	283
31.2	Die Rolle der Unterrichtserfahrung.....	284
31.3	Die Rolle der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen.....	288
31.4	Technologiebezogene und epistemologische Überzeugungen.....	295
31.5	Lehrerprofile.....	301
32	Diskussion der Ergebnisse zur Wirksamkeit der Fortbildung.....	305
32.1	Wirkebene 1 – Akzeptanz.....	306
32.2	Wirkebene 2 – Selbstwirksamkeitsüberzeugungen.....	307
32.3	Wirkebene 2 – technologiebezogene Überzeugungen.....	308
32.4	Wirkebene 2 – epistemologische Überzeugungen.....	313
32.5	Wirkebene 3 – Einsatzhäufigkeit digitaler Werkzeuge.....	314
33	Konsequenzen für die Fortbildungspraxis.....	317
33.1	Konsequenzen für die Gestaltung von Fortbildungen.....	317
33.2	Konsequenzen für die beforschte Fortbildung.....	320
34	Limitationen.....	323
35	Resümee und Ausblick.....	325
J)	Literaturverzeichnis.....	331
K)	Anhang.....	399

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Potenzblume	34
Abbildung 2: Folie zum Hintergrund des Werkzeugeinsatzes	128
Abbildung 3: Modellierungsaufgabe zum Erdölverbrauch.....	131
Abbildung 4: Aufgabenausschnitt zum Ultraschallsensor.....	132
Abbildung 5: Folie zu Einsatzmöglichkeiten und Rolle digitaler Werkzeuge.....	134
Abbildung 6: Folie zu Wissensfacetten in Anlehnung an Prediger et al. (2011).....	135
Abbildung 7: Folie zu Dokumentationen von Schülerlösungen.....	138
Abbildung 8: Informationsblatt zur Aufgabe „Potenzblume“	141
Abbildung 9: Übersicht über die untersuchten Merkmale.....	147
Abbildung 10: Überblick über den Verlauf der Studie.....	154
Abbildung 11: Übersicht über die untersuchten Merkmale.....	225
Abbildung 12: Kennwerte der latenten Profilanalyse.....	246
Abbildung 13: Ergebnis der LPA	247
Abbildung 14: Ergebnisse der querschnittlichen Analyse.....	252
Abbildung 15: (Gewichtetes) Histogramm der Propensity-Scores.....	262
Abbildung 16: Längsschnittliche Entwicklung der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	265
Abbildung 17: Längsschnittliche Entwicklung der technologiebezogenen Überzeugungen.....	267
Abbildung 18: Längsschnittliche Entwicklung der epistemologischen Überzeugungen.....	270
Abbildung 19: Längsschnittliche Entwicklung der Einsatzhäufigkeit	273
Abbildung 20: Überblick über die querschnittlichen Ergebnisse	282
Abbildung 21: Identifizierte Lehrerprofile	305
Abbildung 22: Mögliche Anregung zur Reflexionsförderung.....	322

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Untersuchte Merkmale gegliedert nach Wirkebene.....	148
Tabelle 2: Übersicht über die erfassten Merkmale	155
Tabelle 3: Items der Skala „SW_Aufgaben“	192
Tabelle 4: Items der Skala“ SW_Unterricht“.....	192
Tabelle 5: Deskriptive Statistiken der Items bzgl. Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	193
Tabelle 6: Globale Fitwerte der Skalen bzgl. Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	194
Tabelle 7: Lokale Fitwerte der Skalen bzgl. Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	195
Tabelle 8: Items der Skala "TÜ_Auslagerungsprinzip".....	197
Tabelle 9: Items der Skala "TÜ_Repräsentationswechsel".....	198
Tabelle 10: Items der Skala "TÜ_Entdecken"	199
Tabelle 11: Items der Skala "TÜ_Zeitaufwand".....	200
Tabelle 12: Items der Skala "TÜ_Verlust von Fertigkeiten"	200
Tabelle 13: Items der Skala "TÜ_Unreflektiertes Arbeiten"	201
Tabelle 14: Items der Skala "Erst Mathe, dann DW"	202
Tabelle 15: Deskriptive Statistiken der Items bzgl. technologiebezogener Überzeugungen.....	203
Tabelle 16: Globale Fitwerte der Skalen bzgl. technologiebezogener Überzeugungen.....	204
Tabelle 17: Globale Fitwerte des modifizierten Modells	205
Tabelle 18: Lokale Fitwerte der Skalen bzgl. technologiebezogener Überzeugungen.....	206
Tabelle 19: Korrelationstabelle der Skalen bzgl. technologiebezogener Überzeugungen.....	207
Tabelle 20: Items der Skala "U_Repräsentationswechsel"	209
Tabelle 21: Items der Skala "U_Individuelle Zugänge"	210
Tabelle 22: Items der Skala "U_Reflexion".....	210

Tabelle 23: Items der Skala "U_Entdecken".....	210
Tabelle 24: Items der Skala "U_Üben“.....	211
Tabelle 25: Deskriptive Statistiken der Items bzgl. Einsatzhäufigkeit.....	212
Tabelle 26: Globale Fitwerte der Skalen bzgl. Einsatzhäufigkeit.....	213
Tabelle 27: Lokale Fitwerte der Skalen bzgl. Einsatzhäufigkeit.....	214
Tabelle 28: Korrelationstabelle der Skalen bzgl. Einsatzhäufigkeit.....	215
Tabelle 29: Items der Skala "BM_Rules".....	216
Tabelle 30: Items der Skala "BM_Inquiry".....	217
Tabelle 31: Items der Skala "LL_Instruction".....	218
Tabelle 32: Items der Skala "LL_Active Learning".....	219
Tabelle 33: Globale Fitwerte der Skalen bzgl. Epistemologischer Überzeugungen.....	220
Tabelle 34: Ergebnisse der konfirmatorischen Faktorenanalyse.....	221
Tabelle 35: Lokale Fitwerte der Skalen bzgl. Überzeugungen zur Natur der Mathematik.....	222
Tabelle 36: Lokale Fitwerte der Skalen bzgl. Lehr-Lern- Überzeugungen.....	223
Tabelle 37: Übersicht über die Erfassung der untersuchten Merkmale.....	226
Tabelle 38: Übersicht über die Merkmale der querschnittlichen Stichprobe.....	227
Tabelle 39: Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeitsüb., Erfahrung und Geschlecht.....	230
Tabelle 40: Korrelationen zwischen techn. Überzeugungen, Erfahrung und Geschlecht.....	231
Tabelle 41: Korrelationen zwischen epistem. Überzeugungen, Erfahrung und Geschlecht.....	232
Tabelle 42: Korrelationen zwischen Einsatzhäufigkeit, Erfahrung und Geschlecht.....	233
Tabelle 43: Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeits- und epistem. Überzeugungen.....	235

Tabelle 44: Korrelationen zwischen technologiebezogenen und epistem. Überzeugungen	237
Tabelle 45: Korrelationen zwischen techn. Überz. und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen	239
Tabelle 46: Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeitsüberz. und Einsatzhäufigkeit.....	241
Tabelle 47: Korrelationen zwischen epistem. Überzeugungen und Einsatzhäufigkeit	242
Tabelle 48: Korrelationen zwischen techn. Überzeugungen und Einsatzhäufigkeit	244
Tabelle 49: Verteilung der Experimentalgruppe auf die drei Standorte der Fortbildung.....	254
Tabelle 50: Experimental- und Kontrollgruppe zum Zeitpunkt des Pretests.....	257
Tabelle 51: Experimental- und Kontrollgruppe nach Durchführung des Matchings.....	261
Tabelle 52: Bewertung der Fortbildung durch die Experimentalgruppe	264
Tabelle 53: Selbstwirksamkeitsüberzeugungen zu Pre- und Posttestzeitpunkt	265
Tabelle 54: Technologiebezogene Überzeugungen zu Pre- und Posttestzeitpunkt.....	266
Tabelle 55: Epistemologische Überzeugungen zu Pre- und Posttestzeitpunkt	269
Tabelle 56: Einsatzhäufigkeiten zu Pre- und Posttestzeitpunkt.....	272
Tabelle 57: Zusammenfassung der Befunde zur Wirksamkeit der Fortbildung.....	276
Tabelle 58: Übersicht über die Ergebnisse zur Wirkung der Fortbildung.....	306



A) Einleitung

1 Motivation des Forschungsinteresses

Digitale Medien halten immer stärkeren Einzug in alle Lebensbereiche. Sowohl in der Arbeitswelt als auch im privaten Lebensbereich werden digitale Medien wie Smartphones, Tablets und Computer mit einer Vielzahl an verschiedenen Anwendungen genutzt. In Anbetracht dieser zunehmenden Digitalisierung spricht die Kultusministerkonferenz in Anlehnung an die industrielle Revolution von einer „digitalen Revolution“ (vgl. KMK 2016, S. 8). Diese betrifft dabei in zweifacher Weise auch den Bildungsbereich. So muss Schule einerseits auf das Leben in einer digitalen Welt vorbereiten (digitale Bildung als Lehr-Lerninhalt), andererseits eröffnen sich durch den Einsatz digitaler Medien auch neue Möglichkeiten Lernprozesse zu unterstützen (vgl. BMBF 2016, S. 10).

Zur Unterstützung von mathematischen Lernprozessen spielen dabei insbesondere digitale Mathematikwerkzeuge eine wichtige Rolle. Hierzu gehören etwa Tabellenkalkulationsprogramme, dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter und Computer-Algebra-Systeme. In den vergangenen Jahrzehnten konnte gezeigt werden, dass diese Werkzeuge das Potenzial haben auf vielfältige Art und Weise zu einem verständnisvollen Mathematiklernen beizutragen (vgl. Barzel 2012; Drijvers et al. 2016; Zbiek et al. 2007). Der Vorteil entfaltet sich beispielsweise beim entdeckenden Lernen, da schnell vielfältige Beispiele generiert und diese anschließend auf Muster und Strukturen hin untersucht werden können. Ebenfalls kann durch die Reduktion schematischer Abläufe ein verstärkter Fokus auf den Aufbau konzeptuellen Wissens gelegt werden. Die Möglichkeit der Unterstützung des Wechsels zwischen tabellarischer,

grafischer und algebraischer Darstellung etwa im Bereich der Funktionenlehre bietet zudem die Möglichkeit, mathematische Begriffsbildungsprozesse zu unterstützen (vgl. z.B. Laakmann 2013; Rieß 2018). In Anerkennung dieser Potenziale wird der Einsatz digitaler Werkzeuge sowohl von Seiten der Wissenschaft als auch von Seiten der Lehrerverbände gefordert (vgl. GDM & MNU 2010; NCTM 2015). Dem folgend ist in Deutschland die Nutzung digitaler Werkzeuge in den Bildungsstandards sowohl für den mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004) als auch für die allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2015) fest verankert: „*Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt*“ (KMK 2015, S. 13).

Trotz der allgegenwärtigen Forderung nach dem Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge ist jedoch festzustellen, dass der Einsatz bisher weit hinter den erhofften Möglichkeiten zurückbleibt (vgl. Bretscher 2014, S. 43; Lorenz et al. 2017; Schmidt-Thieme & Weigand 2015, S. 482). Anfangs wurde als Grund hierfür vor allem die mangelnde Verfügbarkeit entsprechender Geräte im Schulalltag angeführt und erhofft, dass mit zunehmender Verbreitung der Werkzeuge diese auch verstärkt Einzug in den Unterricht halten. Dies hat sich jedoch nicht bewahrheitet. So bleibt trotz der zunehmenden schulischen Verfügbarkeit digitaler Werkzeuge die unterrichtliche Nutzung gering. Exemplarisch sei etwa die Studie von Bretscher (2014) genannt, in der nur 2% der Lehrkräfte den grafikfähigen Taschenrechner mindestens einmal die Woche nutzten, während 30% angaben, ihn gar nicht einzusetzen. Das Phänomen der geringen unterrichtlichen Nutzung gilt dabei nicht nur für digitale Mathematikwerkzeuge. So bezeichnet etwa bereits Cuban im Jahre 2001 Computer als „*oversold and underused*“ (Cuban 2001, S. 1) und spielt darauf an, dass Schulen zwar zunehmend mit Computern ausgestattet werden, die Nutzung dieser jedoch nur marginal ist. An dieser Situation scheint sich bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt wenig geändert zu haben. So stellt beispielsweise der Länderindikator 2017 in einer repräsentativen Befragung fest, dass der MINT-Unterricht nicht

die erhoffte Vorreiterrolle bei der Verwendung digitaler Medien einnimmt und „*digitale Medien weiterhin auf insgesamt eher niedrigem Niveau im schulischen Kontext verankert sind*“ (Deutsche Telekom Stiftung 2017, S. 29).

Es ist in Anbetracht dessen natürlich zu fragen, worauf die geringe Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge zurückzuführen ist. Als Grund lässt sich einerseits die dem Schulsystem innewohnende Innovationsträgheit (vgl. Gräsel 2010, S. 9) anführen. Andererseits muss festgestellt werden, dass die Komplexität der Einführung digitaler Werkzeuge deutlich unterschätzt wurde (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand 2015, S. 482). Diese Komplexität ergibt sich insbesondere daraus, dass der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge nicht nur technische Bedienkenntnisse erfordert, sondern Lehrkräfte vor neue unterrichtliche Herausforderungen stellt. So bedingt der Einsatz dieser Werkzeuge etwa eine Veränderung methodisch-didaktischer Unterrichtsplanung und erfordert veränderte Aufgabenformate, welche die Potenziale digitaler Werkzeuge ausnutzen. Die Lehrkraft benötigt daher spezifische Kompetenzen, um einen didaktisch sinnvollen Einsatz zu realisieren: „*There is general agreement in the research that the teacher’s ability to integrate digital tools in mathematics teaching is a crucial factor when working in a classroom where technology is available*“ (Drijvers et al. 2016, S. 6). Diese Kompetenzen umfassen dabei neben entsprechendem fachdidaktischem Wissen vor allem auch entsprechende Überzeugungen (vgl. Ertmer et al. 2014; Hegedus et al. 2017a, S. 581).

So ist klar, dass Überzeugungen zu digitalen Werkzeugen, welche zum Beispiel in den folgenden Aussagen von Lehrkräften zum Ausdruck kommen, einen großen Einfluss darauf haben wie digitale Werkzeuge genutzt werden:

„Der [Schüler, Anmerkung des Verfassers] hat bis jetzt nur Mathematik gemacht mit einem Computeralgebra System. Der Junge kann in Mathe nichts. Wenn das Ding ausgeschaltet ist, ist der fertig, ist der erledigt.“ (Rögler 2014, S. 983)

„Die grafikfähigen Taschenrechner-Stunden waren deutlich schülerzentrierter, die Schüler haben sich gegenseitig viel erklärt. Durch den Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners blieb auch mehr Zeit für Vertiefungen.“ (Äußerung einer Lehrkraft in der vorliegenden Studie)

Während das erste Zitat den Verlust von wichtigen Kompetenzen aufgrund des Werkzeugeinsatzes hervorhebt, spiegelt das zweite Zitat positive Überzeugungen zum digitalen Werkzeugeinsatz wider, da nach Überzeugung der Lehrkraft die Lernprozesse durch den Werkzeugeinsatz unterstützt werden. Diese unterschiedlichen Überzeugungen werden im Allgemeinen nicht ohne Konsequenzen für den Unterricht bleiben. So ist zu vermuten, dass die erste Lehrkraft als Konsequenz ihrer Überzeugungen den Werkzeugeinsatz eher restringiert, während die zweite Lehrkraft einen stärkeren Einsatz realisiert. Positive Überzeugungen zum Werkzeugeinsatz werden dementsprechend als wichtige Gelingensbedingung der unterrichtlichen Integration digitaler Werkzeuge angesehen. In der Breite scheinen bei Lehrkräften jedoch vielfach negative Überzeugungen zu digitalen Werkzeugen zu dominieren. So sehen etwa nur 14,4 % der MINT-Lehrkräfte im digitalen Medieneinsatz ein Potenzial für den Aufbau und das Vertiefen von Fachwissen (vgl. Deutsche Telekom Stiftung 2017, S. 28). In Anbetracht dieser Befunde ist es nicht verwunderlich, dass der Werkzeugeinsatz noch hinter den Erwartungen zurückbleibt.

Neben positiven Überzeugungen zum Werkzeugeinsatz sind zusätzlich auch weitere Überzeugungsfacetten von Bedeutung. So wird etwa Überzeugungen bezüglich der eigenen Kompetenz, sogenannten Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, eine wichtige Rolle zugesprochen (vgl. Ertmer &

Ottenbreit-Leftwich 2010, S. 261 ff.). Lehrkräfte, die sich nicht zutrauen die Anforderungen der unterrichtlichen Integration bewältigen zu können, werden digitale Werkzeuge wohl nur bedingt einsetzen, selbst wenn sie von den Vorteilen der Werkzeuge überzeugt sind. Darüber hinaus werden epistemologische Überzeugungen zur Mathematik und zu mathematischen Lehrprozessen als bedeutsam angesehen (vgl. Ertmer & Ottenbreit-Leftwich 2010, S. 262 ff.). Hier wird beispielsweise angenommen, dass stärker konstruktivistische Lehr-Lern-Überzeugungen zu einem anderen digitalen Medieneinsatz führen, als wenn die Lehrkraft eher die Überzeugung hat, dass Lernen ein einseitiger Transferprozess von Wissens-elementen von einem Lehrenden zu einem Lernenden ist. Insgesamt legt der gegenwärtige Wissensstand somit nahe, dass ein mehrdimensionales Bündel an Überzeugungen für den erfolgreichen Werkzeugeinsatz im Mathematikunterricht bedeutsam ist. Allerdings ist das Beziehungsgefüge zwischen den beschriebenen Überzeugungsfacetten sowie dem Einsatz digitaler Werkzeuge vor allem quantitativ bisher nur unzureichend aufgeklärt. Differenzierte Ergebnisse wären hier jedoch wünschenswert, um relevante Ansatzpunkte zur Unterstützung von Lehrkräften, etwa im Rahmen von Fortbildungen, zu identifizieren.

Dies ist insbesondere daher von Relevanz, da Fortbildungen zum digitalen Werkzeugeinsatz eine große Bedeutung zugesprochen wird. So wird sich von Fortbildungen zu digitalen Werkzeugen erhofft entsprechende Kompetenzen auf- und auszubauen und so die Integration digitaler Werkzeuge in den Unterricht zu unterstützen. Beispielsweise hebt die Kultusministerkonferenz hervor: „*Mit Blick auf das lebenslange Lernen und auf die rasante technologische und konzeptionelle Entwicklung im Bereich der digitalen Medien kommt der Lehrerfortbildung eine besondere Bedeutung zu*“ (KMK 2016, S. 29). In Anbetracht der Tatsache, dass der Lehrerbildung so große Bedeutung zugemessen wird, stellt sich natürlich die Frage, wie entsprechende Angebote gestaltet werden müssen und ob diese die gewünschte Wirkung entfalten. Die Auseinandersetzung mit diesen Fragen

ist jedoch noch relativ jungen Datums. So stellt etwa Törner (2015) in seiner Übersicht über die Entwicklung der Forschung zur Lehrerbildung in Deutschland fest, dass diese in der deutschsprachigen Literatur „*grundsätzlich wie auch fachspezifisch erst in den letzten fünfzehn Jahren hierzulande angekommen zu sein*“ (Törner 2015, S. 200) scheint. Aber auch international ist der Forschungsbedarf noch groß. So konnten zwar mittlerweile generische Merkmale erfolgreicher Fortbildungen, wie etwa eine hinreichend lange Fortbildungsdauer und eine Anregung von Reflexionsprozessen, identifiziert werden (vgl. z.B. Barzel & Selter 2015), es wird jedoch insbesondere ein Mangel an quantitativen Studien zur Effektivität von Fortbildungen hervorgehoben (vgl. Sztajn et al. 2017, S. 816). Dieser Mangel an Forschungsergebnissen betrifft dabei insbesondere auch Fortbildungen zum digitalen Werkzeugeinsatz. So fehlen konkretere Hinweise zur Gestaltung von Fortbildungen zum digitalen Werkzeugeinsatz sowie Studien, welche untersuchen, ob die Fortbildungen die erhoffte Wirkung entfalten (vgl. Driskell et al. 2015; Hegedus et al. 2017b, S. 28). Driskell et al. (2015) stellen dementsprechend fest: „*Limited published professional development research impairs the ability to advance the field of mathematics educational technology professional development*“ (Driskell et al. 2015, S. 661).

Zusammengefasst können somit die folgenden zwei Forschungslücken ausgemacht werden. Zum einen wird den Überzeugungen bei der Integration digitaler Werkzeuge zwar eine wichtige Rolle zugesprochen, der Zusammenhang zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, Überzeugungen zu digitalen Werkzeugen, epistemologischen Überzeugungen und unterrichtlichem Einsatz der Werkzeuge ist bisher jedoch nur in Ansätzen empirisch untersucht. Zum anderen fehlen Studien, welche die Wirksamkeit von Fortbildungsmaßnahmen zu digitalen Werkzeugen untersuchen.

2 Ziele der Arbeit

Das vorliegende Forschungsprojekt setzt bei diesen Forschungsbedarfen an. Die Arbeit hat dabei zwei Ziele:

- Zum einen soll das Beziehungsgefüge zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, Überzeugungen zu digitalen Werkzeugen, epistemologischen Überzeugungen und dem unterrichtlichem Werkzeugeinsatz weiter aufgeklärt werden. Auch soll der Zusammenhang dieser Merkmale mit dem Geschlecht und der Vorerfahrung mit digitalen Werkzeugen eruiert werden. Die Untersuchung dieses Beziehungsgefüges ist vor allem deshalb bedeutsam, um relevante Ansatzpunkt für die Unterstützung von Lehrkräften im Rahmen von Fortbildungen zu identifizieren.
- Das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Erkenntnisse zur Wirksamkeit von Fortbildungen zu digitalen Werkzeugen zu generieren. Hierzu soll untersucht werden, inwieweit sich durch eine Fortbildung zu digitalen Werkzeugen die Überzeugungen und die Einsatzhäufigkeit digitaler Werkzeuge bei den Lehrkräften verändern. Auch aus diesen Ergebnissen sollen dann Rückschlüsse für die Gestaltung von Professionalisierungsmaßnahmen gezogen werden. Als Forschungsgegenstand dient dabei die Fortbildung „GTR kompakt“ zum Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, welche in Zusammenarbeit vom Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM), dem Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen und der Westfälische Wilhelms-Universität Münster entwickelt wurde. Die Fortbildung umfasste vier eintägige Präsenzveranstaltungen und wurde im Rahmen der verpflichtenden Einführung grafikfähiger Taschenrechner in der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen zum Schuljahr 2014/2015 an drei verschiedenen Standorten in NRW durchgeführt.

3 Struktur der Arbeit

Die Struktur der Arbeit stellt sich insgesamt wie folgt dar: In Teil B) wird der theoretische Hintergrund der Arbeit dargelegt wobei in Kapitel 4 zunächst die Potenziale aber auch die möglichen Risiken des Werkzeugeinsatzes skizziert werden. Dies ist vor allem daher von Relevanz, da sich die Überzeugungen von Lehrkräften zu digitalen Werkzeugen in der Regel auf diese Potenziale und Risiken beziehen und sich andererseits die inhaltliche Gestaltung der Fortbildung an den Potenzialen und Risiken des Werkzeugeinsatzes orientierte. Kapitel 5 nimmt die Lehrkraft und ihre Überzeugungen bei der Integration digitaler Werkzeuge in den Blick, bevor in Kapitel 6 Erkenntnisse zur Gestaltung und Wirkung von Fortbildungen zu digitalen Werkzeugen betrachtet werden. In Teil C) wird beschrieben, wie die beforschte Fortbildung „GTR kompakt“ unter Berücksichtigung der zuvor dargelegten theoretischen Grundlagen konzipiert wurde. In Teil D) werden die Forschungsfragen und entsprechende Hypothesen formuliert, bevor in Teil E) das methodische Vorgehen erläutert wird. Teil F) stellt die Entwicklung der Erhebungsinstrumente dar, mit denen die Forschungsfragen beantwortet werden sollen. Teil G) der Arbeit widmet sich schließlich der Beantwortung der ersten Forschungsfrage nach den Zusammenhängen zwischen epistemologischen Überzeugungen, technologiebezogenen Überzeugungen, Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und unterrichtlichem Werkzeugeinsatz. Teil H) beantwortet anschließend die Frage nach der Wirksamkeit der beforschten Fortbildung. In Teil I) werden die Ergebnisse diskutiert und Konsequenzen für die Gestaltung von Fortbildungen zum digitalen Werkzeugeinsatz abgeleitet.



B) Theoretischer Hintergrund

Die Beforschung der Integration digitaler Mathematikwerkzeuge bedingt zunächst eine Auseinandersetzung mit dem Werkzeug an sich. So bilden die Potenziale und Risiken digitaler Mathematikwerkzeuge das Fundament und den Bezugspunkt sowohl für die Einordnung der Überzeugungen der Lehrkräfte zum Werkzeugeinsatz als auch für die Gestaltung der in dieser Arbeit beforschten Fortbildung. Dementsprechend werden in Kapitel 4 zunächst die in der Literatur benannten Potenziale und Risiken in den Blick genommen. Klar ist jedoch, dass eine Realisierung dieser Potenziale ganz entscheidend von der Lehrkraft abhängt. In diesem Zusammenhang haben sich vor allem die Lehrerüberzeugungen als ein wichtiger Faktor herausgestellt. Aus diesem Grund wird in Kapitel 5 die Rolle von technologiebezogenen Überzeugungen, Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und epistemologischen Überzeugungen und deren Rolle bei der Werkzeugintegration diskutiert. Kapitel 6 nimmt schließlich die Professionalisierung der Lehrkräfte in den Blick und stellt dar, welche Erkenntnisse zur Gestaltung und Wirksamkeit von Fortbildungen zu digitalen Werkzeugen vorliegen.

4 Chancen und Risiken digitaler Werkzeuge

Der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht sollte, genau wie der Einsatz jedes Mediums, nicht bloßer Selbstzweck sein. Vielmehr sind Medien Mittler im Lernprozess, um aufbauend auf bestimmten Vorstellungen von erfolgreichem Lernen den Wissenserwerb zu unterstützen. Der Einsatz digitaler Werkzeuge muss somit immer mit den zugrundeliegenden Vorstellungen von erfolgreichem Lehren und Lernen von Mathematik in Verbindung gebracht werden. Dies bringen Windschitl & Sahl (2002) wie folgt treffend auf den Punkt:

„[...] there can be no individual or institutional vision of technology use' that exists separately from beliefs about learners, beliefs about what characterizes meaningful learning, and beliefs about the role of the teacher within the vision.“ (Wind-schitl & Sahl 2002, S. 202)

Im folgenden Kapitel soll daher erläutert werden, wie sich der Einsatz digitaler Werkzeuge basierend auf fachdidaktischen Grundlagen und Vorstellungen eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts begründen lässt. Da sich die vorliegende Arbeit auf den Einsatz digitaler Werkzeuge in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe bezieht, und hier vor allem der Funktions- und Ableitungsbegriff im Mittelpunkt steht, werden die Ausführungen dabei vor allem im Hinblick auf diesen Bereich fokussiert. Die zentralen Potenziale die sich hier in der Literatur identifizieren lassen (vgl. z.B. Pierce & Stacey 2010), sind einerseits die Unterstützung von Repräsentationswechseln (Abschnitt 4.2), eine Förderung von entdeckendem Lernen (Abschnitt 4.3), die Unterstützung von Modellierungstätigkeiten (Abschnitt 4.4) sowie die Reduzierung einer einseitigen Kalkülorientierung (Abschnitt 4.5). Für die Betrachtung anderer Inhaltsbereiche und weiterer Potenziale, sei hingegen auf entsprechende Übersichtsarbeiten und Reviews verwiesen (vgl. z.B. Barzel 2012; Burrill et al. 2002; Clark-Wilson et al. 2014; Dunham & Dick 1994; Drijvers et al. 2016; Ellington 2003, 2006; Ferrara et al. 2006; Hegedus et al. 2017b; Heid & Blume 2008; Hoyles & Lagrange 2010; Lagrange et al. 2001; Penglase & Arnold 1996; Zbiek et al. 2007).

Ziel des vorliegenden Kapitels ist es einerseits die inhaltliche Gestaltung der Fortbildung (vgl. Teil C) theoretisch zu fundieren. Andererseits beziehen sich Überzeugungen von Lehrkräften zu digitalen Werkzeugen häufig auf die Chancen und Risiken des Einsatzes, so dass die Darstellungen in diesem Kapitel weiterhin auch wichtige Bezugspunkte für Kapitel 5 liefern, in welchem die Rolle der Lehrerüberzeugungen bei der Integration digitaler Werkzeuge beleuchtet wird.

4.1 Digitale Mathematikwerkzeuge

Da sich die in der vorliegenden Arbeit beforschte Fortbildung mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge befasst, ist zunächst zu klären, was im Folgenden unter „digitalen Werkzeugen“ verstanden werden soll. Dies ist vor allem daher notwendig, da in diesem Zusammenhang eine Vielzahl unterschiedlicher Begriffe wie „digitale Medien“, „neue Medien“, „Technologieeinsatz“ oder „Computereinsatz“ Verwendung finden.

Einen Zugang für eine mögliche Systematisierung der unterschiedlichen Begriffe, welche sich für die vorliegende Arbeit als hilfreich erweist, bietet die Unterscheidung zwischen Lernumgebungen und Werkzeugen (vgl. Barzel et al. 2005). Unter dem Begriff Lernumgebung wird nach Barzel et al. (2005) alles gefasst, *„was den Lernenden von außen instruiert. Dazu gehören Inhalte, Ziele, Kommunikationsformen u. a., die durch die Lehrperson oder die Lernenden vorstrukturiert bzw. festgelegt sind und die den Rahmen bieten für die Lernprozesse der Einzelnen oder der Gruppe“* (Barzel et al. 2005, S. 30). Lernumgebungen verfolgen also ein bestimmtes fachliches Ziel in einem Themenbereich. Somit können im Rahmen dieser Definition zum Beispiel Applets sowie interaktive Arbeitsblätter als Lernumgebung bezeichnet werden.

Werkzeuge werden im Unterschied zu Lernumgebungen als *„universell einsetzbare Hilfsmittel zur Bearbeitung einer breiten Klasse von Problemen“* (Barzel et al. 2005, S. 30) beschrieben. Werkzeuge lassen sich dabei weiter in klassische Werkzeuge (z.B. Zirkel und Geodreieck), allgemeine digitale Werkzeuge, die fächerübergreifend einsetzbar sind (z.B. Textverarbeitungsprogramme wie MS-Word), und digitale Mathematikwerkzeuge, die eine besondere Relevanz für die Mathematik haben,

unterteilen.¹ Zu diesen digitalen Mathematikwerkzeugen zählen Heintz et al. (2014, S. 507) dynamische Geometrie-Software, Tabellenkalkulationsprogramme, Funktionenplotter, Computeralgebra-Systeme (CAS) sowie Multirepräsentationswerkzeuge, welche die Funktionen der zuvor genannten Werkzeuge vereinen und vernetzen (siehe auch Heintz et al. 2017, S. 15 ff.). Diese Vernetzung zeichnet sich insbesondere durch einen einfachen Wechsel und die dynamische Verknüpfung der unterschiedlichen Repräsentationsformen wie Term, Tabelle und Graph aus. Der Einsatz dieser digitalen Werkzeuge ist, anders als der Einsatz von digitalen Lernumgebungen, für den langfristigen Einsatz über mehrere Jahrgangstufen und in unterschiedlichen Unterrichtssequenzen geeignet. Wenn in dieser Arbeit von digitalen Werkzeugen gesprochen wird, sind digitale Mathematikwerkzeuge in obigem Sinne darunter zu verstehen. Für den Schulunterricht in der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen ist die Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners verpflichtend vorgeschrieben, wobei die auf dem Markt befindlichen Handheld-Geräte zwar nicht notwendigerweise über ein CAS verfügen, jedoch alle den einfachen Wechsel und die dynamische Verknüpfung der unterschiedlichen Repräsentationsformen ermöglichen.

4.2 Unterstützung von Repräsentationswechseln

Nachdem geklärt wurde, was in der vorliegenden Arbeit unter digitalen Werkzeugen verstanden wird, werden in den folgenden Kapiteln die Potenziale und Risiken dieser Werkzeuge erläutert. Als erstes wird dabei in diesem Kapitel darauf eingegangen, wie digitale Werkzeuge das Arbeiten mit verschiedenen Repräsentationsformen im Bereich der Funktionenlehre unterstützen können.

¹ Zu beachten ist, dass die Unterscheidung zwischen Lernumgebungen und Werkzeugen nicht als trennscharf anzusehen ist. So sind zum Beispiel digitale Lernumgebungen häufig in Form interaktiver Arbeitsblätter in digitale Werkzeuge eingebettet.

Mathematikdidaktische Fundierung

Die Potenziale digitaler Werkzeuge zur Unterstützung von Repräsentationswechseln lassen sich vor allem dann nachvollziehen, wenn klar ist, warum der Einbezug verschiedener Repräsentationsformen für das Mathematiklernen als bedeutsam angesehen wird. Repräsentationen mathematischer Objekte sind dabei insbesondere deshalb relevant, da aufgrund der Abstraktheit mathematischer Objekte nur durch Repräsentationen ein Zugang zu diesen Objekten möglich wird:

“[...] there is an important gap between mathematical knowledge and knowledge in other sciences such as astronomy, physics, biology, or botanic. We do not have any perceptive or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary, as for any object or phenomenon of the external world. We cannot see them, study them through a microscope or take a picture of them. The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings.” (Duval 2000, S. 61)

Demzufolge gibt es zum Beispiel keinen direkten Zugriff auf den Begriff der Funktion, erst über die Repräsentation etwa als Funktionsterm oder Funktionsgraph wird es möglich einen Zugang zu gewinnen. Die Repräsentationen sind jedoch niemals mit dem mathematischen Begriff identisch (vgl. Duval 2002, S. 313). Aus kognitionspsychologischer Sicht wird angenommen, dass die sogenannten externalen Repräsentationen in Form von Sprache, Symbolen, Bildern oder physikalischen Objekten auf mentale (auch internal genannte) Repräsentationen einwirken. Weiterhin wird angenommen, dass die internalen Repräsentationen verknüpft werden können und diese Verknüpfungen dadurch stimuliert werden, dass Beziehungen zwischen den externalen Repräsentationen hergestellt werden. In diesem Sinne kann der Aufbau von mathematischem Verständnis als Prozess des Bildens von Netzwerken mentaler Repräsentationen aufgefasst werden. Repräsentationen werden hinzugefügt, neu angeordnet, neue