WILEY-VCH

Cumrun Vafa

Das Universum in Rätseln

Cumrun Vafa

Das Universum in Rätseln

Cumrun Vafa

Das Universum in Rätseln

Übersetzt von Michael Bär

WILEY-VCH

Autor

Prof. Cumrun Vafa
Harvard University
Department of Physics
17 Oxford Street
Massachusetts
Vereinigte Staaten von Amerika

Übersetzer
Dr. Michael Bär, Wiesloch, Deutschland

Titelbild
© wacomka/Getty Images

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-527-41406-2
ePDF ISBN 978-3-527-83594–2
ePub ISBN 978-3-527-83595-9

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Für meine geliebte Frau und lebenslange Freundin,
Afarin,
und meine lieben Söhne,
Farzan, Keyon und Neekon,
die meine Inspiration für das Schreiben dieses Buches waren,
sowie meine lieben Eltern,
Simeen und Javad,
die meine Neugierde gefördert haben.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort *XI*

1 Eine kurze Einführung in die moderne Physik *1*
1.1 Die Anfänge der Naturwissenschaft in der Antike *2*
1.2 Newtonsche Mechanik *4*
1.3 Lagrangesche und hamiltonsche Mechanik *5*
1.4 Maxwells Theorie des Elektromagnetismus *6*
1.5 Aufbruch in die vierte Dimension: Relativitätstheorie *8*
1.6 Die Entdeckung des Zufalls: Quantenmechanik *10*
1.7 Die seltsame Theorie: Quantenfeldtheorie *13*
1.8 Der Weg in die Zukunft: Quantengravitation *14*

2 Symmetrie und Erhaltungssätze *17*
2.1 Rätsel zur Motivation *18*
2.2 Symmetrie: Schönheit als Naturprinzip *20*
2.3 Das Noether-Theorem *23*
2.4 Die Erweiterung des Symmetriebegriffs: Supersymmetrie *30*
2.5 Quasikristalle und Quasisymmetrie *31*
2.6 Strings und die Erhaltung der elektrischen Ladung *33*
2.7 Spontane Symmetriebrechung *36*

3 Symmetriebrechung *37*
3.1 Und sie bewegt sich doch: Symmetriebrechung und die Bewegung der Erde *38*
3.2 Spontane Symmetriebrechung *40*
3.3 Spontane Symmetriebrechung und Magnetismus *43*
3.4 Verkehrsplanung mit Symmetrie: vier Städte *45*
3.5 Symmetriebrechung und das Higgs-Boson *48*
3.6 Die große Vereinheitlichung der Kräfte *51*
3.7 Supraleitung und Symmetriebrechung *52*
3.8 Ein ungewöhnliches Beispiel: starre Körper *53*
3.9 Rechts und links in der Natur: Händigkeit *54*

4 Die Kraft der einfachen und abstrakten Mathematik 57
4.1 Gesetze und Randbedingungen 57
4.2 Eine kurze Einführung in komplexe Zahlen 59
4.2.1 Der Fundamentalsatz der Algebra 60
4.3 Gravitationslinsen – eine Konsequenz der allgemeinen Relativitätstheorie 66

5 Kontraintuitive Mathematik 71
5.1 Vorbemerkungen 71
5.2 Paradoxa der Unendlichkeit 76
5.2.1 Alle Zimmer belegt: Hilberts Hotel und andere Unendlichkeiten 77
5.3 Verrückte Mathematik: Analytische Reihen 79
5.4 Das Ziegenparadoxon 83

6 Physikalische Intuition 91
6.1 Intuitive Physik 91
6.2 Galileo Galilei 92
6.3 Isaac Newton 93
6.4 Physikalische Intuition in der Mathematik 95
6.5 Das *Heureka* des Archimedes 100
6.6 Der Satz des Pythagoras 101
6.7 Spezielle Relativitätstheorie 103
6.8 Statistische Mechanik 104

7 Kontraintuitive Physik 111
7.1 Auftrieb einmal anders betrachtet 111
7.2 Warum können Flugzeuge fliegen? 112
7.3 Warum ist der Nachthimmel dunkel? 114
7.4 Die Maxwell-Gleichungen 115
7.5 Einsteins spezielle Relativitätstheorie 115
7.5.1 Impuls- und Energieerhaltung in Aktion 116
7.6 Paradoxa in der Quantenmechanik 117
7.6.1 Das Doppelspaltexperiment 118
7.7 Ununterscheidbarkeit in der Quantenmechanik 120
7.8 Das EPR-Paradoxon 121
7.9 Schwarze Löcher 122
7.10 Holographie: Weniger ist mehr 124

8 Natürlichkeit in der Physik: Dimensionsanalyse 127
8.1 Ein Aha-Erlebnis 127
8.2 Von großen und kleinen Zahlen: Größenordnungen 127
8.3 Dimensionsanalyse 128
8.4 Die Strahlung beschleunigter Ladungen 129
8.5 Skalierung und konforme Feldtheorien 130
8.6 Der Natur in die Karten geschaut: natürliche Einheiten 131

8.7 Schwarze Löcher *133*
8.8 Symmetrie und Natürlichkeit *135*

9 Unnatürlichkeit und große Zahlen *137*
9.1 Wie groß ist zu groß: unnatürliche Zahlen *137*
9.1.1 Das Rinderproblem des Archimedes *139*
9.2 Das Aufkommen des heliozentrischen Modells und Unnatürlichkeit *140*
9.3 Etwas Zahlentheorie *141*
9.3.1 Ein mysteriöser Kartentrick *141*
9.4 Licht und Dunkel: Der Aufbau des Universums *142*
9.5 Die Geometrie der Raumzeit *143*
9.6 Fragen über Fragen *145*
9.7 Längenskalen *145*
9.8 Zeitskalen *146*

10 Partner oder Gegner: Religion und Naturwissenschaft *149*
10.1 Grundlegende Fragen *150*
10.1.1 Methodik *150*
10.2 Naturwissenschaft *gegen* Religion *151*
10.2.1 Wie alt ist das Universum? *151*
10.3 Naturwissenschaft *und* Religion *152*
10.4 Der Ursprung des Universums *153*
10.5 Einstein und die Religion *154*
10.6 Feynman und die Religion *155*
10.7 Hawking und die Religion *155*
10.8 Pascal und die Religion *157*
10.9 Kausalität und Gott *158*

11 Verschiedene Standpunkte: Dualität *161*
11.1 Zwei mathematische Beispiele *162*
11.2 Dualität in der Quantenmechanik *164*
11.3 Maxwells Theorie *164*
11.4 Dualität in der Stringtheorie *167*
11.5 T-Dualität *168*
11.6 Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten und Spiegelsymmetrien *169*
11.7 Sonstige Dualitäten: Geometrie und Kraft *173*
11.8 Dualität in schwarzen Löchern *176*
11.9 Holographie *177*
11.10 Das wignersche Gesetz *178*

12 Zusammenfassung *181*
12.1 Symmetrie und Symmetriebrechung *182*
12.2 Eichsymmetrie *184*
12.3 Intuitive Mathematik *186*
12.4 Kontraintuitive Mathematik *187*

12.5 Intuitive und unintuitive Physik 188
12.6 Natürlichkeit 189
12.7 Physik und Religion 190
12.8 Dualität 191

Stichwortverzeichnis 193

Vorwort

> *Das Universum in Rätseln* gibt einen wunderbaren Überblick über zentrale Konzepte der modernen Physik und Mathematik, die mithilfe von Rätseln erkundet werden. Dies ist eine der ungewöhnlichsten und fesselndsten Herangehensweisen an dieses Thema, die mir je begegnet ist. Sie ermöglicht es dem Leser – gleich ob Anfänger oder Experte –, aus Freude am Lösen von Rätseln zu lernen. Was für eine unterhaltsame und zielführende Weise, von einem der bedeutendsten Physiker der Welt in grundlegende und hochaktuelle Konzepte eingeführt zu werden!
>
> Brian Greene

> Dieses Buch ist ein faszinierender und ungewöhnlicher Rundgang durch die Gedankenwelt von Physik und Mathematik, illustriert durch elementare und unterhaltsame Rätsel. Die Leserinnen und Leser werden viel Spaß haben und dabei eine Menge lernen!
>
> Edward Witten

Wir haben ein angeborenes Interesse daran, zu verstehen, wie die Welt um uns herum funktioniert. Wir hoffen stets, dass wir in unserer Umwelt Muster erkennen können, die uns helfen können, die unmittelbare Zukunft vorauszusehen. Der Versuch, diese Muster zu quantifizieren, hat die Menschen im Laufe der Zeit zur Entwicklung der Mathematik geführt. Es kann daher kaum überraschen, dass die Mathematik die natürliche Sprache zur Beschreibung der inneren Zusammenhänge der Natur ist. In diesem Sinn ist die Mathematik das Rückgrat der Physik, deren Ziel es ist, zu verstehen, wie das Universum auf seiner grundlegendsten Ebene funktioniert. Je tiefgreifender wir die Naturgesetze verstehen, desto fortgeschrittenere Methoden der Mathematik benötigen wir – was einer der Gründe ist, weshalb die Physik heute oft im Ruf steht, aufgrund ihrer mathematischen Komplexität für Uneingeweihte undurchdringlich zu sein.

Diese Wahrnehmung übersieht jedoch die grundlegende Einfachheit der physikalischen Gesetze und die Eleganz der Mathematik, die das innere Wesen der physikalischen Realität beschreibt. Als Physiker mit einem ausgeprägten Interesse an

Mathematik habe ich aus erster Hand erlebt, wie unter all den komplexen und beeindruckend wirkenden mathematischen Strukturen, die wir zur Formulierung physikalischer Gesetze verwenden, letztlich einfache und tiefe Kleinodien der Wahrheit verborgen liegen. Diese Wahrheiten sind es, die viele Wissenschaftler herauszudestillieren versuchen, wenn sich die erste Aufregung nach einer grundlegenden Entdeckung wieder gelegt hat. Diese „Kleinodien" sind eine Art „Zusammenfassung", eine Essenz, die Wissenschaftler als Lektionen aus den neu entdeckten Naturgesetzen mitnehmen. Glücklicherweise lassen sich diese zentralen Gedanken oft durch einfache mathematische Rätsel veranschaulichen. Diese Rätsel sind so weit vereinfacht, dass sie ohne umfangreichen Hintergrund in Physik oder Mathematik zu knacken und zu verstehen sind. Sie machen Spaß und können darüber hinaus auch eine tiefe Befriedigung vermitteln, weil sie grundlegende Eigenschaften der physikalischen Realität aufdecken, die weit über die bloße Lösung des Rätsels hinausgehen. Mein Ziel ist es in diesem Buch, meine Leserinnen und Leser auf eine Reise mitzunehmen, auf der sie mithilfe von unterhaltsamen Rätseln einige Aspekte der Gesetze unseres Universums entdecken und verstehen können.

Der rote Faden in diesem Buch ist der Gedanke, dass es in der physikalischen Realität nicht *die* zentrale allumfassende Idee gibt, sondern vielmehr eine große Ansammlung von manchmal geradezu gegensätzlichen Konzepten, die gemeinsam einen Rahmen für die physikalische Realität schaffen. Das Hauptanliegen des Buches ist es, zu verstehen, wie diese gegensätzlichen Konzepte miteinander verwoben sind und gemeinsam auf ein Ziel hinwirken. Ich hoffe, dass ich manche dieser Konzepte verdeutlichen kann, indem ich einige der wichtigsten Spielregeln der Natur, die wir kennen, durch das Kaleidoskop der Rätsel betrachte.

Nach einem kurzen Rückblick auf die Geschichte der Wissenschaft und das jahrhundertealte Wechselspiel zwischen Mathematik und Physik wende ich mich nacheinander den einzelnen Hauptthemen zu. Jedes Kapitel des Buches beginnt mit einem Gedanken zu einem Thema und erörtert dann die Bedeutung des entgegengesetzten Gedankens. Anschließend wird dasselbe Spiel wiederholt, wobei Physik und Mathematik vertauscht werden. Und all das passiert mithilfe von unterhaltsamen Rätseln.

Das erste Thema ist Symmetrie. Einerseits lernen wir die Bedeutung der Symmetrieerhaltung in Mathematik und Physik kennen, andererseits sprechen wir darüber, wie wichtig die Symmetriebrechung in vielen Fällen ist. Ein schönes Beispiel für diese Prinzipien in Form eines Rätsels ist die Aufgabe, die kürzeste Autobahnverbindung zwischen vier Städten an den Ecken eines Quadrates zu finden. Wir werden sehen, wie Symmetrien Erhaltungssätze wie z. B. die Energieerhaltung erklären können, aber auch, warum das Brechen von Symmetrien für unsere Existenz noch wichtiger ist. Dabei werden wir sehen, dass und wie dies mit dem erst vor kurzem entdeckten Higgs-Teilchen zusammenhängt. Wir werden lernen, dass unsere Augen und ihre Lage in unserem Gesicht eine Symmetriebrechung belegen. Wir diskutieren die Bedeutung sowohl intuitiver als auch nicht intuitiver Ideen in Physik und Mathematik. Intuitive Ideen (wie die der Stetigkeit, die in verschiedenen Aspekten von physikalischen Gesetzen eine wichtige Rolle spielt) sind ebenso wie nicht intuitive Abstraktionen (wie die, die Zeit als eine zusätzliche Dimension analog zum

Raum aufzufassen) notwendig, um die Realität grundlegend zu verstehen. Wir werden zeigen, dass das Konzept der Stetigkeit, so einfach es auch sein mag, zu weitreichenden Schlussfolgerungen führt. Das wird durch ein Rätsel illustriert, das offenbart, warum es auf dem Äquator immer diametral entgegengesetzte Punkte mit der gleichen Temperatur geben muss. Wir zeigen auch, wie die Stetigkeit der physikalischen Gesetze erklären kann, warum Einsteins allgemeine Relativitätstheorie voraussagt, dass es immer eine ungerade Anzahl von Gravitationsbildern eines Sterns geben muss.

Als Nächstes wenden wir uns dem Gedanken der Natürlichkeit zu – der Frage, wie man auf der Basis von sehr wenigen Informationen grobe Abschätzungen über die Funktionsweise der Natur machen kann. Zum Beispiel werden wir eine einfache Abschätzung dafür demonstrieren, um wie viel wir die Sonne schrumpfen müssten, damit sie zu einem schwarzen Loch würde. Dann wenden wir uns dem gegenteiligen Gedanken zu und diskutieren, weshalb unnatürlich große oder kleine Zahlen in den grundlegenden Naturgesetzen erscheinen, die nur schwer vorhersehbar sind. Warum ist die Gravitationskraft zwischen Protonen beispielsweise eine Billion Billion Billion mal kleiner als die elektrische Abstoßung zwischen ihnen? Wir veranschaulichen das Auftreten unerwartet großer Zahlen in der Physik anhand des alten Rinderproblems des Archimedes, dessen Lösung eine Zahl mit mehreren Hunderttausend Stellen ist! Ich wage es in diesem Zusammenhang auch, kurz auf einige Verbindungen zwischen Wissenschaft und Religion einzugehen, aber im Gegensatz zu der üblichen Herangehensweise an dieses Thema werden wir selbst diesen Punkt in Form von unterhaltsamen Rätseln angehen. Ein Beispiel dafür ist ein Rechteck aus kleineren Rechtecken – wenn jede Seite der kleinen Rechtecke eine ganzzahlige Länge hat, dann muss auch das größere Rechteck dieselbe Eigenschaft besitzen.

Abschließend werden wir im Zusammenhang mit der Stringtheorie einige der aufregendsten Entwicklungen der modernen Grundlagenphysik kennenlernen. Die Stringtheorie hat sich in der letzten Zeit zu einer einheitlichen Quantentheorie entwickelt, die alle fundamentalen Kräfte umfasst. Ich konzentriere mich bei der Diskussion auf die Idee der Dualität in der Stringtheorie, die Stringtheoretiker schon seit einigen Jahrzehnten fasziniert und die eine Schlüsselrolle bei ihrer Entwicklung gespielt hat. Wir werden sehen, wie die Dualität beispielsweise zu einem besseren Verständnis von schwarzen Löchern und der Natur von Raum und Zeit führt. Ein Rätsel zur Veranschaulichung der Dualität sind kollidierende Ameisen auf einem Stab, wobei jede Ameise so lange wie möglich verhindern soll, dass sie von den Enden des Stabes fällt. Es wird sich zeigen, dass der Gedanke der Dualität in der Stringtheorie den roten Faden dieses Buches widerspiegelt: die Vorstellung, dass gegensätzliche Prinzipien nahtlos auf konsistente und machtvolle Weise zusammenwirken können, um zu beschreiben, wie die Natur funktioniert. Nichts ist mächtiger als gegensätzliche Gedanken, die gemeinsam auf ein Ziel hinarbeiten. Aus diesem Grund ist die Dualität ein äußerst mächtiges Werkzeug zur Entschlüsselung der tiefsten Geheimnisse unseres Universums.

Ich hoffe, Sie finden die Lektüre dieses Buches und das Knobeln an den darin enthaltenen Rätseln interessant und lehrreich. Ich würde mich freuen, wenn Sie daraus eine neue Wertschätzung für die fundamentalen Gesetze unseres Universums und die Rolle der Mathematik in diesem Universum schöpfen könnten – und vielleicht gleichzeitig eine Wertschätzung für die Kraft von Rätseln, die uns fordern und informieren und oft auch überraschen können! Und selbst wenn Sie als Kind kein Rätselliebhaber waren – wie ich es war und immer noch bin – ist es nie zu spät, einer zu werden!

Ich hatte das Glück, einige junge Studenten am Harvard College auf diese Entdeckungsreise mitnehmen zu können. Ich hielt dort ein Seminar ab, das eigens zu dem Zweck konzipiert war, herauszufinden, wie man Rätsel nutzen kann, um die Geheimnisse des Universums zu veranschaulichen. Dieses Buch ist ein Ergebnis dieses Seminars und hat sehr von dem Feedback und den vielen Anregungen profitiert, die ich von meinen Studenten erhielt. Das Buch basierte ursprünglich auf den Notizen dreier Studenten – Tony Feng, Kewei Li und Weiming Zhao –, die von Steve Nadis noch wesentlich überarbeitet wurden. Einige Abbildungen verdanke ich Xiaotian Yin. Weiterhin danke ich einer Reihe von Kollegen und insbesondere Yaotian Fu und Brian Greene für ihre Unterstützung bei der Fertigstellung des vorliegenden Buches. Ich bin sicher, dass es noch viele Möglichkeiten gibt, dieses Buch zu verbessern. Wenn Sie – die Leserinnen und Leser – Anregungen hierzu haben, würde ich mich freuen, diese über meine Webseite www.cumrunvafa.org zu erhalten.

Nicht zuletzt war es die Anregung meiner Frau Afarin, die mich veranlasste, das erwähnte Seminar zu entwickeln und im Anschluss daran dieses Buch zu schreiben. Ohne ihre Begeisterung für dieses Projekt würde das Buch nicht existieren. Ich danke ihr von ganzem Herzen.

Harvard, Mai 2020 *Cumrun Vafa*

1
Eine kurze Einführung in die moderne Physik

Viele grundlegende Aspekte der Physik haben einfache mathematische Grundlagen, die aber hinter der Komplexität des mathematischen Formalismus verschwinden – sowohl hinter der ungewohnten Sprache als auch hinter den manchmal furchteinflößenden Gleichungen. Dasselbe gilt für viele abstrakte mathematische Ideen, die oft auf einfachen Gedanken beruhen, welche jedoch aufgrund ihrer komplexen Darstellung verdeckt werden. Tiefgehende Ideen in Physik und Mathematik haben oft einen gemeinsamen Kern, was angesichts der Nähe dieser beiden Disziplinen wenig überraschend ist. Überraschend ist jedoch die Tatsache, dass einige dieser gemeinsamen Gedanken während der Lösung mathematischer Rätsel auftauchen können.

In diesem Buch geht es um Rätsel und ihre Beziehungen zur Mathematik und Physik. Natürlich können Rätsel auch an und für sich faszinierend und unterhaltsam sein. Wir werden in diesem Buch aber vor allem sehen, wie sie als Brücke zwischen den Disziplinen dienen und einige der Verknüpfungen zwischen diesen offenbaren können. Zur Lösung der in diesem Buch vorgestellten Rätsel sind keine fortgeschrittenen Kenntnisse in Mathematik oder Physik erforderlich, und ich gehe auch nicht davon aus, dass Sie in einem dieser Fächer über einen tieferen Hintergrund verfügen. Ein intensives Interesse an diesen Themen sowie einige Grundkenntnisse wären aber sicher hilfreich, um von diesem Buch zu profitieren.

Obwohl Physik und Mathematik eng miteinander verflochten sind, sind ihre Kulturen und Philosophien doch sehr unterschiedlich. Die Mathematik baut auf fundamentalen Axiomen auf und entwickelt daraus mithilfe von logischen Schlussfolgerungen ihr Gedankengebäude. Physikalische Gesetze sollen erklären, wie verschiedene Aspekte der Natur funktionieren und wie die Naturgesetze zusammenpassen, sind aber nicht in hierarchischer Weise logisch voneinander abgeleitet. Die Physik betont eher die *praktischen Beziehungen* zwischen den Gesetzen als ihre logischen Abhängigkeiten. Natürlich ist der logische Zusammenhalt der Ideen aber ebenfalls ein notwendiger Bestandteil der physikalischen Gesetze. In der Mathematik ist es wichtig, sich jederzeit über die zugrunde liegenden Axiome und Annahmen im Klaren zu sein. Im Gegensatz dazu können sich die Axiome oder Grundprinzipien der Physik, wie wir bald sehen werden, jederzeit ändern, wenn neue Beweise oder theoretische Gedanken ans Licht kommen.

Das Universum in Rätseln, 1. Auflage. Cumrun Vafa.

Die Geschichte zeigt, dass Fortschritte in der Physik häufig darauf zurückgehen, dass ein Gedanke, der zunächst als *Folge* eines physikalischen Gesetzes aufgefasst wurde, zu einem eigenständigen Prinzip erhoben wurde. Ein guter Physiker sollte daher immer offen sein für solche Neuformulierungen oder „Umwälzungen", weil ein solches neu erkanntes Prinzip sich letztlich oft als grundlegender erweist und einen größeren Anwendungsbereich hat als das Gesetz, von dem es ursprünglich abgeleitet war. Ein gutes Beispiel hierfür ist das Prinzip der Impulserhaltung. Es wurde zunächst als Folge der newtonschen Gesetze betrachtet, bevor man später – mehr als 225 Jahre nach der Vorstellung der newtonschen Gesetze in der *Principia Mathematica* – feststellte, dass die Erhaltungssätze grundlegender sind als die Bewegungsgesetze, weil sie auf die zugrunde liegenden Symmetrien der Natur zurückgehen.

Aus diesem Grund versuchen Physiker, sich eine flexible Einstellung zu der Frage zu bewahren, was genau die grundlegenden Prinzipien sind – eine Einschätzung, die sich ständig weiterentwickelt. Anstatt der hierarchischen Anordnung von Gedanken zu viel Wert beizumessen, sind Physiker bereit, die Anordnung jederzeit neu zu sortieren, was in völligem Gegensatz zu der Art und Weise steht, wie Mathematiker gewöhnlich die Mathematik betrachten. Ein mathematisches Theorem gilt, sofern es sich einmal als richtig erwiesen hat, als ewige Wahrheit – im Gegensatz zu physikalischen Prinzipien, die jederzeit Veränderungen unterworfen sein können, wenn neue empirische Erkenntnisse auftauchen.

Es gibt noch weitere Unterschiede. Zur Erklärung komplizierter Phänomene verwenden Physiker z. B. oft Näherungen, gegen die Mathematiker eine grundsätzliche Abneigung pflegen. Beispielsweise ist die Frage, ob der Raum „stetig" ist, d. h. keinerlei Lücken enthält, oder aus nahe nebeneinander liegenden diskreten Punkten besteht, für Physiker, die sich mit den Ergebnissen von Experimenten auf wesentlich größeren Entfernungsskalen befassen, eher irrelevant. Für Mathematiker hingegen ist die Stetigkeit eines Raums oder ihr Fehlen ein zentraler und entscheidender Punkt und alles andere als irrelevant.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen kurzen Überblick über die Welt der Physik zu geben. Es handelt sich dabei wirklich nur um einen kurzen und allgemeinen Abriss ohne Anspruch auf eine umfassende Darstellung, die im Rahmen eines einzigen Kapitels ohnehin unmöglich wäre. Stattdessen wollen wir einige Beispiele aus der Geschichte der Physik anreißen, die einen Eindruck davon vermitteln können, wo wir heute in unserem langjährigen Streben nach dem Verständnis der grundlegenden Naturgesetze stehen.

1.1 Die Anfänge der Naturwissenschaft in der Antike

Schon die Griechen versuchten zu verstehen, wie die Welt um sie herum funktionierte, und entwickelten dabei viele faszinierende Ideen über die Physik. Sie liebten die Eleganz der Mathematik und einige Gelehrte – unter ihnen Platon – glaubten, dass die letzte Wahrheit über die Welt in der Geometrie verborgen liege. Sie schätzten die Schönheit der euklidischen Geometrie und der platonischen Körper, von

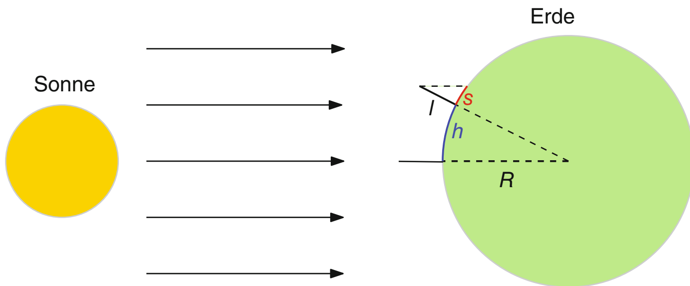

Abb. 1.1 Eratosthenes von Kyrene bestimmte um 230 v. Chr. den Umfang der Erde.

denen sie glaubten, sie könnten als Basis für die Beschreibung der Natur insgesamt dienen. Die meisten ihrer Gedanken zur Mathematik waren ihrer Zeit weit voraus, ihr Verständnis der Physik erreichte jedoch nicht dasselbe Niveau. Aristoteles glaubte z. B., dass Steine nach unten fallen, weil sie gerne auf der Erde liegen. Von allen möglichen Zuständen, argumentierte er, sei derjenige, auf dem Boden zu liegen, den Steinen der liebste. Daraus schloss er, dass Steine um so schneller fielen, je mehr sie sich dem Boden näherten, weil sie froh seien, ihrem natürlichen und bevorzugten Ruheplatz näher zu kommen.[1)]

Trotz der unzulänglichen Beschreibungen physikalischer Phänomene durch die alten Griechen ist ihr grundlegendes Bestreben, die Welt durch schöne Mathematik zu beschreiben, auch heute noch von entscheidender Bedeutung für die Wissenschaft. Einige ihrer Gedanken, wie z. B. die Vorstellung, dass Materie aus einzelnen Atomen besteht (u. a. von Leukipp und Demokrit weiterentwickelt), haben sich bis heute gehalten. Sie glaubten nicht nur, dass die Erde eine Kugel sei, sondern bestimmten um 230 v. Chr. auch ihren Umfang. Insbesondere Eratosthenes von Kyrene beobachtete, wie sich die Länge eines Schattens ändert, wenn wir uns eine bestimmte Wegstrecke vom Äquator entfernen, und berechnete daraus mithilfe einiger trigonometrischer Beziehungen den Radius der Erde. Sein Resultat war nicht allzu weit von dem heute akzeptierten Wert entfernt – der Fehler betrug etwa 15 %. Sein Grundgedanke war dabei, dass der Schatten eines Stockes mit einer Länge von l zur Mittagszeit von null auf s anwächst, wenn man sich um eine Entfernung h senkrecht zum Äquator (also entlang eines Meridians) bewegt (siehe Abb. 1.1). Der Radius R der Erde ergibt sich dann aus einfachen trigonometrischen Überlegungen zu

$$\sim h \cdot \frac{l}{s} \,.$$

Der Ansatz, Wissen aus der reinen Geometrie zu nutzen, um daraus praktische Erkenntnisse über die Natur zu erhalten, wurde noch lange nach der Zeit der frühen griechischen Mathematiker gepflegt. Um 1000 n. Chr. bestimmten die Astronomen Ibn Muadh und Ibn Al-Haytham die Höhe der Atmosphäre zu etwa 80 km[2)], was bis auf etwa 20 % dem heute akzeptierten Wert entspricht. Ibn Muadh und einige

1) Siehe *Über den Himmel* von Aristoteles.

2) Siehe Goldstein, B.R. (1977). Ibn Muadh's treatise on twilight and the height of the atmosphere. *Arch. Hist. Exact Sci.* 17: 97–118; 10.1007/BF02464977.

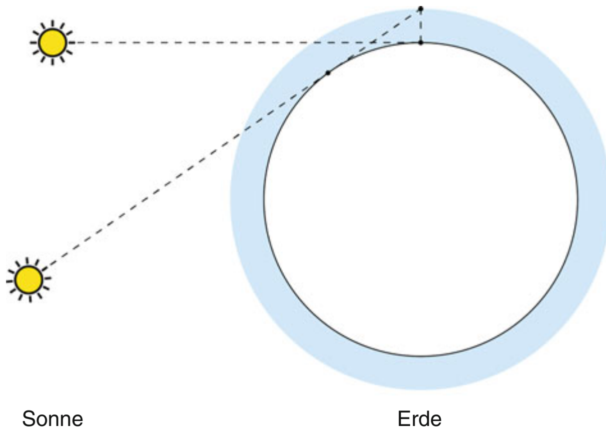

Abb. 1.2 Ibn Muadh und Ibn Al-Haytham bestimmten im 11. Jahrhundert die Höhe der Atmosphäre.

andere muslimische Wissenschaftler verwendeten für ihre Berechnungen den Einfallswinkel der Sonne in der Dämmerung sowie einfache trigonometrische Funktionen. Ihr Ansatz war recht einfach: Der Grund dafür, dass der Himmel nicht sofort bei Sonnenuntergang dunkel wurde, musste darin liegen, dass die oberen Teile der Atmosphäre auch nach Sonnenuntergang noch Licht von der Sonne empfangen konnten (siehe Abb. 1.2). Wenn man nun misst, wie lange (t als Bruchteil der Länge eines Tages) es dauert, bis das Sonnenlicht „ausläuft" (das sind in der Realität einige Stunden), so die Argumentation von Ibn Muadh, so erhält man daraus die Höhe h der Atmosphäre als Bruchteil des Radius R der Erde aus

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{24}\right)^2 \sim \frac{h}{R}\,.$$

Tiefergehende Anwendungen der Mathematik auf die Physik ließen noch einige Jahrhunderte auf sich warten. Dabei waren die Arbeiten von Sir Isaac Newton Mitte bis Ende des 16. Jahrhunderts ein fulminanter Startpunkt.

1.2 Newtonsche Mechanik

Newton war ohne Frage einer der großen Pioniere der modernen Physik. Sein zweites Gesetz der Bewegung ist eine der berühmtesten Gleichungen der Physik. Es beschreibt eine differentielle Beziehung zwischen dem *Ort* $x(t)$ und der *Kraft* F:

$$a := \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{m}\,.$$

Während F und m physikalische Größen sind, ist die *Beschleunigung* a eher eine mathematische Größe, die als zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit definiert ist. Je mehr die Physik sich bemühte, quantitative Aussagen über ihre Studienobjekte zu machen, desto stärker wurde die Mathematik zu einem zentralen Bestandteil ihrer Sprache. Newton musste ein komplettes Teilgebiet der Mathematik erfinden – die Analysis –, um sein zweites Gesetz in präzisen mathematischen Begriffen formal ausdrücken zu können. Dies ist aber nur eines von zahlreichen Beispielen, bei denen Anforderungen der Physiker an die Formulierung von physikalischen Gesetzen zur Entwicklung neuer Zweige der Mathematik führten. Umgekehrt führte auch die Mathematik zu neuen Erkenntnissen in der Physik. Im Laufe des Buches werden wir viele Beispiele für diese gegenseitige Verknüpfung und das Geben und Nehmen zwischen Physik und Mathematik kennenlernen.

1.3 Lagrangesche und hamiltonsche Mechanik

Die Untersuchung der mathematischen Grundlagen der newtonschen Mechanik in verschiedenen physikalischen Kontexten führte zu ihrer weitgehenden Neuformulierung sowie einigen neuen mathematischen Erkenntnissen. In den späten 1700er-Jahren schlug Joseph-Louis Lagrange z. B. eine neue, sogenannte „lagrangesche" Formulierung der Mechanik vor, die dieselben physikalischen Ergebnisse wie die newtonsche Mechanik lieferte, aber auf dem „Prinzip der kleinsten Wirkung" anstelle der Kraft beruhte. Die Wirkung ist ein Integral, das für jeden möglichen Weg, den ein Teilchen von seinem Startpunkt zu einem Endpunkt nehmen könnte, berechnet werden kann. Sie ist als $S = \int (K - V)\,\mathrm{d}t$ definiert, wobei K die kinetische Energie des Teilchens und V seine potentielle Energie entlang des untersuchten Weges ist (siehe Abb. 1.3).

Das Prinzip der kleinsten Wirkung besagt, dass der Weg, dem das Teilchen tatsächlich folgt, derjenige ist, für den die Wirkung minimal ist. Wenn es mehrere Lösungen gibt, entspricht jede Lösung einem Extremum (einem Minimum oder Maximum) der Wirkung.

Abb. 1.3 Die lagrangesche Formulierung der Mechanik betrachtet alle möglichen Wege von einem Start- zu einem Endpunkt. Der tatsächliche Weg – der Weg, den ein Teilchen natürlicherweise nehmen würde – ist derjenige, für den eine als *Wirkung* bezeichnete Größe minimal ist.

Diese neue Sichtweise machte es den Physikern einfacher, die Mechanik unter Randbedingungen (d. h. vorgegebenen Einschränkungen einer Bewegung) zu studieren, wie beispielsweise eine Kugel, die einen Hügel mit einer bestimmten Topographie hinunterrollt, oder einen Kreisel auf verschiedenen Oberflächen. Um die lagrangesche Mechanik zu formalisieren, entwickelten Leonhard Euler und Lagrange ein neues Teilgebiet der Mathematik, die sogenannte *Variationsrechnung*, die sich mit der Extremisierung (also Maximierung oder Minimierung) von Integralen entlang vorgegebener Wege befasst, deren Lösungen die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Dieser Prozess ist schwieriger als das Auffinden der Minima einer Funktion einer endlichen Anzahl von Variablen, da unendlich viele Wege zwischen zwei Punkten im Raum existieren und berücksichtigt werden müssen. In gewissem Sinn ist die Aufgabe daher gleichbedeutend mit dem Auffinden des Minimums einer Funktion (hier der Wirkung) unendlich vieler Variablen (die den Raum aller möglichen Wege bilden). Physiker können nun die Variationsrechnung nutzen, um den Weg mit der kürzestmöglichen Länge zu bestimmen. Die Neugestaltung der klassischen Mechanik im 18. Jahrhundert, die durch die Ideen von Lagrange und Euler angestoßen wurde, schuf die Voraussetzungen für spätere Querverbindungen zur Physik des 20. Jahrhunderts, insbesondere zur Quantenmechanik, die auf der Basis der ursprünglichen newtonschen Gleichungen nicht ohne Weiteres zugänglich gewesen wäre.

In einer weiteren Neuformulierung der klassischen Mechanik reduzierte William Rowan Hamilton die zweiten Ableitungen nach der Zeit auf erste Ableitungen, indem er dafür die doppelte Zahl von Variablen verwendete. Hamilton betrachtete sowohl die Ortsfunktion $x(t)$ als auch die Impulsfunktion $p(t) = mv(t)$ als grundlegende Variablen, anstatt allein $x(t)$ zu betrachten, wie es zuvor üblich gewesen war. Die hamiltonsche Mechanik, wie der neue Formalismus genannt wurde, markierte den Beginn des modernen Begriffs des *Phasenraums* – des Raums von Ort und Impuls. Auch die hamiltonsche Mechanik erweist sich in der Quantenmechanik als nützlich, wie wir später sehen werden. Heute betrachten wir die lagrangeschen und hamiltonschen Formulierungen der Mechanik als allgemeiner und grundlegender als die newtonschen Gesetze; sie sind aus diesem Grund auch breiter anwendbar. Dies veranschaulicht die Tatsache, dass die Axiome der Physik ebensowenig unveränderlich sind wie die ihnen zugrunde liegenden Modelle. Beide können sich im Laufe der Zeit ändern und tun es auch.

1.4 Maxwells Theorie des Elektromagnetismus

Als James Clerk Maxwell mit der Arbeit an seiner Theorie des Elektromagnetismus begann, hatten Michael Faraday und andere bereits viele einzelne Aspekte der zugrunde liegenden Physik verstanden. Bei seinem Versuch, die zahlreichen bekannten Gesetze in einem Formalismus zu vereinen, entdeckte Maxwell eine *mathematische* Inkonsistenz zwischen den Gleichungen. Er löste das Problem, indem er seinen Gleichungen einen neuen mathematischen Term hinzufügte, der heute als Verschiebungsstrom bezeichnet wird. Dieser Term war im Labor schwer zu mes-