Thomas Paradowski

RESEARCH

Intervallarithmetische Untersuchung der Beobachtbarkeit und Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme

Springer Spektrum

Intervallarithmetische Untersuchung der Beobachtbarkeit und Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme

Thomas Paradowski

Intervallarithmetische Untersuchung der Beobachtbarkeit und Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme

Springer Spektrum

Thomas Paradowski
University of Wuppertal
Wuppertal, Deutschland

Genehmigte Dissertation Bergische Universität Wuppertal, 2020

ISBN 978-3-658-33744-5 ISBN 978-3-658-33745-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33745-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Bergischen Universität Wuppertal. Daher gilt mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Tibken, der mir die Möglichkeit der Promotion bot und damit die Erstellung dieser Arbeit überhaupt ermöglichte. Ich möchte mich dabei nicht nur für die fachliche Betreuung, sondern für den überaus freundschaftlichen Umgang und die gewährten Freiheiten bei der Wahl der Thematik und Ausrichtung der Arbeit bedanken.

Herrn Dr.-Ing. habil. Andreas Rauh danke ich nicht nur für die Übernahme des Korreferats und die konstruktive Kritik zur Verbesserung der vorliegenden Arbeit, sondern auch für die Flexibilität im Bezug auf die Prüfung trotz der bestehenden Corona-Pandemie.

Weiterhin danken möchte ich Herrn Dr.-Ing. Adnan Abou-Nabout der mich ermutigt hat den Schritt der Promotion überhaupt zu gehen und mich dabei immer unterstützt hat.

Ebenfalls Danken möchte ich Herrn Dr.Ing. Robert Dehnert, Frau Michelle Damaszek und Frau Sabine Lerch für die Durchsicht dieser Arbeit und das stete freundschaftliche Arbeitsumfeld sowie den fachlichen Austausch.

Meiner Familie Gabriele und Alois Paradowski sowie Yvonne und Christoph Wieschollek bin ich für die jahrelange bedingungslose Unterstützung und den guten Zuspruch sehr verbunden.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Freundin Veronika Padel nicht nur für die Durchsicht dieser Arbeit danken, sondern insbesondere für die aufopferungsvolle Unterstützung in jeder Hinsicht.

Thomas Paradowski

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Klimawandel, Ressourcenknappheit und ein immer stärker umkämpfter globaler Weltmarkt stellen völlig neue Anforderungen an technische Systeme. So ist es notwendig, sowohl die Optimierung bestehender Prozesse weiter voranzutragen, als auch für bevorstehende Probleme neue Lösungsansätze zu entwickeln. Für diese oftmals komplexen Prozesse, führt die Verwendung herkömmlicher Verfahren häufig zu keiner zufriedenstellenden Lösung. Sei es die Entwicklung von Smart-Grids, des autonomen Verkehrs oder möglicher zukunftsträchtiger Energieversorgungen, wie beispielsweise der Kernfusion, all diese Themen betreffen neben vielen anderen Ingenieurdisziplinen auch die Regelungstechnik. Somit entsteht ein Bedarf nach neuartigen Verfahren, um diese Aufgaben zu bewerkstelligen. Dabei stellen modellbasierte Verfahren den vielversprechendsten Ansatz zur Bewältigung dieser Herausforderungen dar. Um dabei die Prozesse für einen großen Arbeitsbereich so genau wie möglich abbilden zu können, ist die Beschreibung als nichtlineares Modell unabdinglich. Durch Sensoren werden systeminterne Größen messtechnisch erfasst und somit das Verhalten der Systeme quantifiziert. Jedoch ist die Einsetzbarkeit als auch die Wirtschaftlichkeit für den Gebrauch zahlreicher Sensoren begrenzt. Hieraus entsteht die Diskrepanz, dass nicht alle für die Regelungstechnik relevanten Größen – auch Zustände genannt – direkt gemessen werden können. Um dennoch alle Zustände eines nichtlinearen Systems zu erfassen, werden Beobachter eingesetzt. Diese schätzen anhand der verfügbaren Messdaten die erforderlichen Zustände. Ob dabei die verfügbaren Messdaten ausreichend sind, um eine qualitative Schätzung zu ermöglichen, führt zu der Frage der Beobachtbarkeit.

Das Themenfeld nichtlinearer Systeme ist aus regelungstechnischer Sicht nicht vollständig erschlossen. So bestehen nur Lösungen, die auf explizite Klassen der nichtlinearen Systeme Anwendung finden. Dies gilt sowohl für die Untersuchung der Beobachtbarkeit als auch für die eigentliche Zustandsschätzung. Die meisten Ansätze zur Untersuchung der Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme basieren auf

T. Paradowski, *Intervallarithmetische Untersuchung der Beobachtbarkeit und Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33745-2_1

der Lie-Algebra. Dabei wird mit Hilfe der Lie-Ableitung die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix aufgestellt und mit den jeweiligen Methoden gezeigt, ob die Bildung der Inversen möglich ist. Im Falle der Zustandsschätzung ist eine Vielzahl an Verfahren in der Literatur aufgeführt. Die Verfahren erstrecken sich von analytischen Methoden über stochastische Verfahren bis hin zu Methodiken, die auf dem maschinelle Lernen beruhen.

Die Untersuchung der Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems ist nur einmalig vorab zu überprüfen. Folglich fällt diese Untersuchung meist in die Planungsphase, in der ein Prozess ausgelegt werden soll. Zu diesem Zeitpunkt bestehen sowohl Systemunsicherheiten, die sich mitunter erst durch eine genauere Systemanalyse erkennen lassen, als auch Freiheitsgrade durch die Wahl unterschiedlicher Sensoreinheiten, die sich in den Parametern der Messgleichung widerspiegeln. Dies erschwert die Untersuchung der Beobachtbarkeit. Um diesen Herausforderungen gerecht zu werden, bedarf es Methodiken, die die Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems unter diesen Gesichtspunkten untersuchen können und gegebenenfalls Abhängigkeiten feststellen. Die Zustandsschätzung wird wiederum erschwert durch Rauschprozesse, welche sich auf die Ausgangsmessungen auswirken. Ist der Störabstand zwischen dem gewünschten Messsignal und dem Rauschen gering oder überwiegt gar das Störsignal die Messung, ist das Erfüllen von zuverlässigen Zustandsschätzungen besonders anspruchsvoll. Hinzu kommt, dass der Anfangszustand unbekannt ist und oftmals nicht eingegrenzt werden kann. Demzufolge sind Beobachter erforderlich, deren Zustandsschätzung global auf dem gesamten Zustandsraum erfolgt. Andernfalls besteht bei lokalen Zustandsschätzern die Gefahr, dass Lösungen gefunden werden, die nicht das Verhalten des nichtlinearen Systems wiedergeben. In der Literatur finden sich zahlreiche Verfahren zur Zustandsschätzung, die von Einstellparametern abhängen. Eine zielführende Einstellung setzt dabei oftmals eine genaue Kenntnis über das zugrundeliegende Rauschen voraus. Sind die Eigenschaften des Rauschens unbekannt, ist eine optimale Zustandsschätzung nicht mehr gewährleistet. Doch auch darüber hinaus basieren einige Verfahren auf zusätzlichen Einstellparametern, die die Zustandsschätzung verbessern oder diese überhaupt erst ermöglichen. Die Wahl dieser Parameter obliegt empirischen Analysen.

Aus diesen Gründen resultiert die Motivation dieser Arbeit Verfahren zu propagieren, die die Untersuchung der Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme zugänglich machen sollen und eine Zustandsschätzung ermöglichen, die lediglich das nichtlineare Modell des Systems voraussetzen. Da aus oben genannten Gründen eine Untersuchung der Beobachtbarkeit auf analytischem Weg nahezu unmöglich erscheint, sollen numerische Verfahren eingesetzt werden. Dazu werden Algorithmen entwickelt und vorgestellt, die es dem Anwender gestatten für ein breites

Spektrum an nichtlinearen Systemen die Beobachtbarkeit zu untersuchen, auch dann, wenn diese Systemunsicherheiten oder freien Parametern unterliegen. Ebenfalls werden Algorithmen zur Zustandsschätzung diskutiert. Dabei steht der Aspekt rauschbehafteter Ausgangsmessungen im Fokus. Weiterhin erfolgt die Zustandsschätzung global auf dem relevanten Zustandsraum und soll dem Anwender ein einheitliches Rahmenwerk bieten, das frei von signifikanten Einstellparametern ist. Ebenfalls stellt der Algorithmus zusätzlich die Genauigkeit bereit, mit der die Zustände geschätzt werden können. Sowohl für die Untersuchung der Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme, als auch für deren Zustandsschätzung, wird die Intervallarithmetik eingesetzt. Dies ermöglicht es globale Verfahren zu entwickeln, Systemunsicherheiten und Freiheitsgrade in den Parametern zu berücksichtigen sowie die Angabe der Güte der Zustandsschätzung.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. In Kapitel 2 werden die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen aufgeführt und erläutert. Anschließend werden in Kapitel 3 die Problemstellung und der Stand der Forschung sowohl für die Untersuchung der Beobachtbarkeit als auch für die Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme dargelegt. Kapitel 4 teilt sich in die beiden Hauptthemen der Untersuchung der Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme und die zugehörige Zustandsschätzung auf. Dazu wird jeweils zunächst die Methodik erklärt, ehe der Algorithmus ausführlich erläutert wird. Im Anschluss daran werden die Algorithmen anhand von Beispielsystemen analysiert und mit anderen Verfahren aus der Literatur verglichen. Schlussendlich beinhaltet das Kapitel 5 ein Resümee zu den diskutierten Verfahren. Zu allen Algorithmen befindet sich im Anhang eine Darstellung als Pseudocode, welche bei der Implementierung der Methoden unterstützen soll.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel bietet einen Überblick über die der Arbeit zugrundeliegenden Begrifflichkeiten der Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme, die regelungstechnischen Grundlagen für Beobachter von nichtlinearen Systemen sowie die benötigten Prinzipien der Intervallarithmetik. Da diese Arbeit sich mit modellbasierten Methoden befasst, sollen diese zunächst aufgegriffen werden.

Ein jedes in der Natur und im industriellen Umfeld vorkommendes System kann durch die Verwendung physikalischer Gesetzmäßigkeiten entsprechend beschrieben werden. Dies führt im Allgemeinen auf beliebig diffizile Differentialgleichungen. Um die Handhabung zu vereinfachen werden die Differentialgleichungen durch das Einführen von Zuständen in gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

überführt, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ den Zustandsvektor und $u \in \mathbb{R}^m$ den Eingangsvektor darstellen mit $n \in \mathbb{N}$ sowie $m \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin stellt der Vektor x_0 die Anfangswerte bzw. die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ der gewöhnlichen Differentialgleichungen dar. Das Vektorfeld $f(x(t), u(t))$ sei reell-analytisch und es gelte $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$. Um Informationen aus einem solchen System beziehen zu können, sind Messungen notwendig. Diese Messungen werden durch die Mess- bzw. Ausgangsgleichung

$$y(t) = h(x(t)) \tag{2.2}$$

beschrieben, mit $y \in \mathbb{R}^p$ als Ausgangsvektor und $p \in \mathbb{N}$. Hierbei sei der Vektor $h(x(t))$ ebenfalls reell-analytisch und es gelte $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Die beiden Gleichungen (2.1) und (2.2) werden als nichtlineare Zustandsraumdarstellung (ZRD) bezeichnet. Bei den durch Gleichung (2.1) beschriebenen Systemen handelt es

T. Paradowski, *Intervallarithmetische Untersuchung der Beobachtbarkeit und Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-33745-2_2

sich um zeitkontinuierliche, zeitinvariante, nichtlineare dynamische Systeme, die im weiteren Verlauf der Arbeit als nichtlineare Systeme bezeichnet werden.

Strenggenommen ist das Verhalten aller realen Systeme nichtlinear. Durch Vereinfachungen und Annahmen, die bereits in der Modellbildung getroffen werden, oder durch eine spätere Linearisierung, kann auch eine lineare Beschreibung des Systems formuliert werden. Die Handhabung dieser daraus resultierenden linearen ZRD wird aufgrund der nahezu vollständig abgeschlossenen Systemtheorie vereinfacht [2]. Jedoch beschreibt die lineare ZRD das reale Systemverhalten nur in einer Umgebung der linearisierten Stelle hinreichend genau. Wird die lineare ZRD weit entfernt der Linearisierungsstelle verwendet, so kann dies in einem Regelkreis dazu führen, dass ein Regler das System instabil werden lässt, da dieser von einem anderen Systemverhalten ausgeht. Um Systeme in einem größeren Arbeitsbereich betreiben zu können, ist eine Beschreibung durch die nichtlineare ZRD unumgänglich. Die Problematik dabei ist, dass die nichtlineare Systemtheorie aus einer Reihe von nicht zusammenhängenden Verfahren und Theorien besteht, welche nur für die jeweiligen Klassen von nichtlinearen Systemen und Regelungen [2] anwendbar sind. Daher werden hier nur die für diese Arbeit relevanten Theorien vorgestellt.

Wie eingangs bereits erwähnt, dient die Messgleichung (2.2) dazu, Informationen des nichtlinearen Systems (2.1) zu erhalten. Die erzielten Informationen hängen dabei von der gewählten Sensorik ab. Für viele regelungstechnische Anwendungen ist allerdings die genaue Kenntnis der Zustände von großer Bedeutung. Jedoch sind oftmals nicht alle Zustände messbar. Dies kann zahlreiche Gründe haben, abhängig von dem jeweiligen nichtlinearen System. So ist die Sensorik teils nicht verfügbar, zu kostenintensiv oder kann baulich bedingt nicht untergebracht werden. Um dennoch Kenntnis über diese Zustände zu erhalten ist es notwendig, diese anhand der messbaren Größen zu schätzen. Um sicherzustellen, dass die Schätzung zu jedem Zeitpunkt hinreichend genau erfolgt, werden Beobachter eingesetzt. Hierbei wird neben dem Ausgangssignal $y(t)$ auch das Eingangssignal $u(t)$ herangezogen, wenn es sich um ein nicht autonomes System handelt. Um einen geeigneten Beobachter entwerfen zu können, ist es unumgänglich, dass das System beobachtbar ist. Daher wird im nachfolgenden Abschnitt der Begriff der Beobachtbarkeit für nichtlineare Systeme aufgegriffen.

2.1 Beobachtbarkeit

Im Fall von nichtlinearen Systemen ist die Definition des Begriffs der Beobachtbarkeit in mehrere Kategorien aufgeteilt. Dies ist dahingehend begründet, dass im Gegensatz zur linearen Systemtheorie die Beobachtbarkeit keine binäre

Entscheidung ist und in verschiedene Fälle aufgeteilt werden kann. Die Konsequenz daraus ist, dass für nichtlineare Systeme auch nur eine Untermenge des Zustandsraums beobachtbar sein kann. Diese Aufteilung wird nachfolgend mit den Feinheiten der verschiedenen Definitionen näher erläutert.

Definition der globalen Beobachtbarkeit

Zunächst soll der Begriff der *globalen Beobachtbarkeit* veranschaulicht werden. Dabei ist entscheidend, ob anhand des Verlaufes des Ausgangsverhaltens $y(t)$ und des Eingangsvektors $u(t)$ eindeutig der Vektor der Anfangswerte x_0 rekonstruiert werden kann. Ist dies für alle Anfangsbedingungen x_0 aus dem Zustandsraum möglich, so führt dies zur nachfolgenden Definition der globalen Beobachtbarkeit.

Definition 2.1 (Globale Beobachtbarkeit) *Ein System*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

sei für $x(t) \in D_x \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u(t) \in C_u \subseteq C^{n-1}$ definiert und es sei $y \in \mathbb{R}^p$. Sind dann alle Anfangsvektoren $x_0 \in D_x$ aus der Kenntnis von $u(t)$ und $y(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty]$ für alle $u \in C_u$ eindeutig bestimmbar, so heißt das System global beobachtbar. [2]

Hierbei ist die Vektorfunktion $u(t)$ $(n-1)$ – mal stetig differenzierbar, was durch den Raum C^{n-1} dargestellt wird. Für den Fall, dass der zeitliche Verlauf von $u(t)$ gleich Null ist und es sich folglich um ein autonomes System handelt, lässt sich die Definition 2.1 für diese Art der Systeme anpassen. Die Betrachtung autonomer Systeme stellt hierbei keine vollständige Einschränkung dar. So lässt sich beispielsweise ein stückweise konstanter Eingang $u(t)$ durch eine Substitution eliminieren. Dies führt wiederum zu einer autonomen Zustandsraumdarstellung [39]. Die Anpassung der Definition 2.1 für autonome Systeme ist durch die nachfolgende Definition beschrieben.

Definition 2.2 (Globale Beobachtbarkeit autonomer Systeme) *Ein auf $D_x \subseteq \mathbb{R}^n$ definiertes System*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = h(x(t))$$

ist global beobachtbar, wenn die Abbildung

$$z = q(x)$$

für alle $x \in D_x$ eindeutig nach x auflösbar ist. [2]

Die aufgeführte Abbildung $z = q(x)$ aus der Definition der globalen Beobachtbarkeit autonomer Systeme wird im Nachfolgenden genauer erklärt. Dazu wird zunächst das zeitkontinuierliche, zeitinvariante autonome nichtlineare dynamische System

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{2.3}$$

mit der zugehörigen Ausgangsgleichung

$$y(t) = h(x(t)) \tag{2.4}$$

betrachtet. Handelt es sich bei den Vektorfeldern f und h um analytische Vektorfelder, so ist die Ausgangskurve $y(t)$ ebenfalls analytisch. Wird zudem $\varphi(t, x)$, der Fluss des Vektorfeldes f, auf der Ausgangsfunktion h betrachtet, so kann die Ausgangskurve in eine konvergente Taylorreihe

$$y(t) = h(\varphi(t, x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L_f^k h(x) \tag{2.5}$$

entwickelt werden. Diese Reihe wird auch als Lie-Reihe bezeichnet, bestehend aus den k Lie-Ableitungen $L_f h(x)$. Dadurch geht die Abbildung

$$x \mapsto h(\varphi(t, x))$$

vom Funktionenraum $\mathbb{R}^n$ zu einer Abbildung

$$x \mapsto \left(L_f^k h(x)\right)_{k=0}^{\infty} \tag{2.6}$$

in den Folgenraum $\mathbb{R}^\infty$ über. Der in Definition 2.2 betrachtete Definitionsbereich D_x ist eine Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Folglich kann der aufgespannte Bildbereich der Abbildung (2.6) topologisch höchstens die Dimension n aufweisen [75]. Somit werden maximal n Komponenten $L_f^k h$ benötigt, um den Bildbereich der Abbildung (2.6) zu parametrieren.

Die zugehörigen Lie-Ableitungen

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^{k-1} h(x)\right) f(x) \tag{2.7}$$

mit $k = 1, \ldots, \kappa$ wobei $\kappa \in \mathbb{N}$ und

$$L_f^0 h(x) = h(x) \tag{2.8}$$

aus der konvergenten Taylorreihe (2.5) werden verwendet, um den Vektor

$$q(x) = \begin{bmatrix} L_f^0 h(x) \\ L_f^1 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\kappa-1} h(x) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

zu bilden. Der Vektor $q(x)$ wird als Beobachtbarkeits-Funktion bezeichnet. Mit dem Vektor

$$z = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\kappa-1)} \end{bmatrix}$$

gilt der Zusammenhang

$$z = q(x), \tag{2.10}$$

welcher bereits in Definition 2.2 aufgeführt ist. Somit gilt laut Definition 2.2, dass der Zustand x anhand von $y, \dot{y}, \ldots, y^{(\kappa-1)}$ bestimmt werden kann, wenn eine Umkehrfunktion $q^{-1}(z) = x$ existiert. Folglich kann mittels der Kenntnis über das Ausgangsverhalten $y(t)$ der Vektor der Anfangszustände x_0 gewonnen werden.

Die Anzahl κ der notwendigen Lie-Ableitungen in Gleichung (2.9) hängt dabei vom autonomen nichtlinearen System, beschrieben durch die Systemgleichungen (2.3) und (2.4), ab. Aufgrund der Abbildung (2.6) kann im allgemeinen Fall die Anzahl der Lie-Ableitungen κ gegen unendlich streben. Wie bereits erwähnt, werden maximal n Komponenten $L_f^k h$ benötigt, um den Bildbereich von (2.6) zu parametrieren. Gilt somit $\kappa = n$ für Gleichung (2.10), ist die Abbildung bijektiv und damit