Dietmar Herrmann

Die antike Mathematik

Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen

Springer Spektrum

Die antike Mathematik

Dietmar Herrmann

Die antike Mathematik

Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen

Springer Spektrum

Dietmar Herrmann
Anzing, Deutschland

ISBN 978-3-642-37611-5 ISBN 978-3-642-37612-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-37612-2

Mathematics Subject Classification (2010): 01A20

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Von demjenigen nun, der die Geschichte irgendeines Wissens überliefern will, können wir mit Recht verlangen, daß er uns Nachricht gebe, wie die Phänomene nach und nach bekannt geworden, was man darüber phantasiert, gewähnt, gemeint und gedacht habe.
(J.W. von Goethe: Aus dem Vorwort der Farbenlehre)

Da die *Geschichte der Mathematik* kein prüfungsrelevantes Vorlesungsfach an deutschen Hochschulen ist, kann ein ergänzendes Buch von Interesse sein. Es bietet für alle Mathematik-Lehrenden und -Interessierten eine ganz neuartige Sicht auf die vielfältigen Problemstellungen, die im Laufe eines Jahrtausends (Thales 580 v. Chr. bis Proklos 420 n. Chr.) in der antiken griechischen Mathematik entwickelt wurden. Aus Umfangsgründen können nur Facetten der verschiedenen Werke gezeigt werden, die sich jedoch zu einem Kaleidoskop der Wissenschaft zusammen setzen. Ein breites Spektrum von Aufgaben, Konstruktionen und Algorithmen summiert sich zu einem neuen Gesamtbild, das mehr Einsicht verschafft als herkömmliche summarische Beschreibungen. Die ausgeklügelten Methoden, die die griechischen Forscher erdacht haben, ringen auch dem heutigen Betrachter Respekt und Anerkennung ab.

Diese erstaunlichen Leistungen sind ohne jegliche Hilfsmittel wie Rechenmaschinen und moderne Kommunikation entstanden. Es wurde Wert darauf gelegt, die ganze Bandbreite der griechischen Mathematik zu schildern, insbesondere auch literarische Quellen wie Epigramme und Lehrgedichte und auch den Kontext der pythagoreisch-platonischen Philosophie einzubringen. Es gibt drei Möglichkeiten einer historischen Aufarbeitung: streng chronologisch, biografisch-personenbezogen oder sachgebunden mithilfe spezieller Themenkreise. Die vorliegende Darstellung wählt eine Mischung der beiden letztgenannten.

Ein erstes Problem bei der Darstellung antiker Mathematik wird von dem berühmten Artikel *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics* von *Sabetai Unguru* aufgeworfen. Der Verfasser äußert darin die Auffassung, dass es prinzipiell unangemessen sei, antike Erkenntnisse mit modernen Formeln darzustellen. Der Formel- und Begriffsapparat der modernen Mathematik beinhaltete Konzepte und Abstraktionen, die das Authentische am historischen Vorgehen möglicherweise verschleiern. Als Beispiel sei die binomische

Formel gewählt. In der modernen Mathematik gilt sie für alle abstrakten Elemente eines kommutativen Rings; eine solche Begriffsbildung ist einem Euklid völlig fremd. Ein Produkt zweier Zahlen oder ein Quadrat ist bei Euklid stets mit einem Flächeninhalt verbunden und kann nur mit Größen gleicher Dimension verknüpft werden. Das griechische Wort αριθμος*(=arithmos)* muss im phythagoreisch-platonischen Umfeld gesehen werden und kann nicht mit dem Wort *Zahl* adäquat übersetzt werden. Um die Darstellungen lesbar zu machen und kompakt zu halten, wird die gewöhnliche Formelsprache verwendet und die lesende Person darauf hingewiesen. Moderne Beweise werden stets als solche gekennzeichnet.

Ein zweites Ziel ist die Schilderung des politisch-kulturellen Umfelds, in dem sich der griechische Wissenschaftler befindet. Das kulturelle Erblühen Athens in einer Phase relativen Friedens zwischen den Perserkriegen – aufgrund ihrer Führungsrolle im Bündnis gegen die Perser – ermöglichte den Bau einer Akademie, die Bildungswillige – wie Aristoteles – aus ganz Griechenland anzog. Alexander befreite Ägypten von der persischen Besatzung und bewirkte eine Machtverschiebung nach Südosten. Die nach seinem Tod durch die Reichsteilung entstehende ägyptisch-syrische Provinz wurde mit ihrer Haupstadt Alexandria intellektuelles und wirtschaftliches Zentrum des Mittelmeerraums. Die dort gegründeten Schulen am Museion und Serapeion überstanden den Zusammenbruch des Ptolemäerreichs und gediehen auch unter der römischen Besatzung. Erst das Aufkommen des Christentums als Staatsreligion beendet das Schicksal der noch an der platonischen Lehre hängenden Wissenschaftler, wie man am Schicksal der Hypatia sieht.

Ein weiteres Anliegen ist das Einbeziehen von neuen, kritischen Gesichtspunkten im Vergleich zur vorliegenden Literatur. Geschichten, wie der Vegetarier Pythagoras bei der Entdeckung eines Lehrsatzes mehrere Stiere geopfert hat oder wie Archimedes mit Brennspiegeln die Segel der römischen Flotte in Brand gesetzt hat, kann man als Märchen abtun. Eine moderne Interpretation von Diophantos, Kritisches zum Werk des Ptolemaios und Heron und neue Übersetzungen von Nikomachos und Theon von Smyrna liefern eine neuartige Sicht auf die griechische Mathematik. Das umfangreiche Werk von Pappos wird völlig neu bewertet. Die verwendeten Methoden setzen meist nur mittlere Kenntnisse voraus. Ergänzend wird bei zahlentheoretischen, algebraischen und Kegelschnitt-Themen auf das Nachwirken in der Mathematik des Mittelalters bzw. der Renaissance eingegangen. Ein eigenes Kapitel ist dem Fortwirken der hellenistischen Mathematik in Rom, Konstantinopel und Bagdad gewidmet. Einige Glanzlichter der Euklidischen Geometrie seit dem Beginn der Neuzeit finden sich im letzten Kapitel. Die Geometrie tritt gegenwärtig in der Ausbildung etwas in den Hintergrund; dies ist aber kein hinreichender Grund die Euklidische Geometrie ganz abzuschaffen nach dem Motto von J. Dieudonne (Mitglied des Bourbaki-Kreises) *Euclid must go*.

Der Autor wünscht eine anregende Lektüre!

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1
1.1 Zum Stand der mathematikgeschichtlichen Forschung 1
1.2 Zum Inhalt des Buchs 6

2 Wie die griechische Wissenschaft begann 9
2.1 Die Entstehung der Mathematik 12

3 Thales von Milet 17
3.1 Mathematisches Wirken 17
3.2 Weitere Berichte über Thales 20

4 Pythagoras und die Pythagoreer 23
4.1 Mathematische Erkenntnisse der Pythagoreer 26
4.2 Figurierte Zahlen 28
4.3 Der Satz des Pythagoras 34
4.4 Pythagoreische Zahlentripel 36
4.5 Heronische Dreiecke und Anwendungen 39
4.6 Pythagoras und die Musik 41
4.7 Mittelwerte der Pythagoreer 45
4.8 Die Blume des Thymaridas 48

5 Hippokrates von Chios 51
5.1 Quadratur nach Alexander von Aphrodisias 52
5.2 Quadraturen nach Eudemos 54

6 Athen und die Akademie 57

7 Platon 61
7.1 Die schönsten Dreiecke Platons 63
7.2 Aus dem Buch Menon 65
7.3 Platonische Körper 68

7.4 Platons Lambda 73
7.5 Die Rolle der Mathematik bei Platon 75

8 Aristoteles und das Lykeion 79
8.1 Mathematik bei Aristoteles 81

9 Die Mathematiker der Akademie 87
9.1 Eudoxos von Knidos 87
9.2 Theodoros von Kyrene 90
9.3 Theaitetos von Athen 92

10 Alexandria 93
10.1 Die Bibliothek 97

11 Euklid von Alexandria 101
11.1 Aus dem Buch I der Elemente 105
11.2 Aus Buch II der Elemente 112
11.3 Die Kreissätze im Buch III 118
11.4 Vollkommene und befreundete Zahlen 122
11.5 Der Euklidische Algorithmus 126
11.6 Der Primzahlsatz von Euklid 129
11.7 Das Parallelenaxiom 131
11.8 Gleichwertige Postulate zum Parallelenaxiom 136
11.9 Buch der Flächenteilungen 141
11.10 Das Axiomensystem der Euklidischen Geometrie 144
11.11 Didaktisches: Wie die Anschauung in die Irre führen kann 147

12 Die klassischen Probleme der griechischen Mathematik 149
12.1 Die Inkommensurabilität 149
12.2 Die Konstruierbarkeit nach Euklid 150
12.3 Die Winkeldreiteilung 153
12.4 Konstruktionen zur Winkeldreiteilung 154
12.5 Die Quadratur des Kreises 157
12.6 Die Würfelverdopplung 158
12.7 Konstruierbarkeit des Fünfecks 158
12.8 Konstruierbarkeit des Siebenecks 160
12.9 Quadrierbarkeit von Möndchen 162
12.10 Die stetige Teilung 165

13 Archimedes von Syrakus 173
13.1 Über die Schwerpunkte 174
13.2 Problem der gebrochenen Sehne 176
13.3 Das reguläre Siebeneck 177

13.4 Das Buch der Kreismessung . . . 178
13.5 Aus dem Buch der Spiralen . . . 181
13.6 Das Buch der Lemmata . . . 187
13.7 Die Quadratur der Parabel . . . 195
13.8 Das Palimpsest . . . 198
13.9 Das Stomachion . . . 200
13.10 Die Methode, Satz 2 . . . 201
13.11 Grabfigur des Archimedes . . . 203
13.12 Weitere Werke Archimedes' . . . 206

14 Eratosthenes von Kyrene . . . 209
14.1 Eratosthenes als Geograf . . . 210

15 Kegelschnitte . . . 215
15.1 Die Parabel . . . 219
15.2 Die Ellipse . . . 224
15.3 Hyperbel . . . 228

16 Apollonios von Perga . . . 233
16.1 Aus dem Buch 3 der Conica . . . 235
16.2 Der Kreis des Apollonios . . . 239
16.3 Das Berührproblem des Apollonios . . . 241

17 Anfänge der Trigonometrie . . . 245
17.1 Aristarchos von Samos . . . 247
17.2 Hipparchos von Nicäa . . . 250
17.3 Satz des Menelaos . . . 252
17.4 Satz des Ceva . . . 254

18 Heron von Alexandria . . . 257
18.1 Aus den Definitiones . . . 259
18.2 Aus der Geometrica . . . 261
18.3 Aus der Metrica . . . 263
18.4 Aus der Stereometrica . . . 272
18.5 Die Flächenformel von Heron . . . 273
18.6 Würfelverdopplung nach Heron . . . 278
18.7 Weitere Sätze von Heron . . . 279
18.8 Fläche des regelmäßigen Fünfecks . . . 280
18.9 Weitere Werke von Heron . . . 282
18.10 Wurzelziehen bei den Griechen . . . 284

19 Klaudios Ptolemaios 289
19.1 Trigonometrie im Almagest 291
19.2 Anwendungen bei der Dreiecksberechnung 296
19.3 Satz des Ptolemaios 297
19.4 Das Additionstheorem 299
19.5 Konstruktion des Fünfecks 301
19.6 Konstruktion des 15-Ecks 303

20 Nikomachos von Gerasa 305
20.1 Aus der Arithmetica 307
20.2 Proportionen und Mittelwerte 310
20.3 Theorem von Nikomachos 312
20.4 Aus dem Kommentar des Iamblichos 314

21 Theon von Smyrna 317
21.1 Die Seiten- bzw. Diagonalzahlen 318
21.2 Geometrische Interpretation 320
21.3 Der Algorithmus von Theon 323
21.4 Verallgemeinerung 323
21.5 Zahlentheorie 323

22 Diophantos von Alexandria 325
22.1 Aus Diophantos' Buch II 329
22.2 Aus Diophantos' Buch IV und V 333
22.3 Aus Diophantos' Buch VI 338
22.4 Aus Diophantos' Büchern in arabischer Sprache 342
22.5 Einige mathematische Erkenntnisse Diophantos' 344
22.6 Lineare Diophantische Gleichung 345
22.7 Das Problem der kongruenten Zahlen 350
22.8 Vergleich mit vorgriechischer Mathematik 351

23 Pappos von Alexandria 355
23.1 Aus Buch VII der Collectio 357
23.2 Regel von Pappos 358
23.3 Berührproblem des Pappos 360
23.4 Das Theorem von Pappos 361
23.5 Der Satz Pappos VII, 122 364
23.6 Das vollständige Vierseit 366
23.7 Harmonische Teilung 369
23.8 Das Vier-Geraden-Problem 371
23.9 Weitere Probleme des Pappos 372
23.10 Synthese und Analyse 376

24 Theon von Alexandria 383
24.1 Hypatia von Alexandria 384

25 Proklos Diadochos 387
25.1 Der Eudemos-Bericht 389
25.2 Weitere wichtige Zitate von Proklos 391

26 Das Erbe der hellenistischen Mathematik 395
26.1 Rom 395
26.2 Boethius 398
26.3 Byzanz-Konstantinopel 400
26.4 Aus der Anthologia Graeca 402
26.5 Bagdad 404

27 Was Euklid noch nicht wusste 411
27.1 Sätze aus der Dreieckslehre 411
27.2 Sätze aus der Vierecksgeometrie 418
27.3 Sätze aus der Kreistheorie 424

Anhang 427

Literatur 433

Index 437

Einleitung 1

Αριθμον ειναι την ουσιαν απαντων

Ich glaube, dass der Versuch Mathematik ohne Bezug auf ihren kulturellen, sozialen, philosophischen und historischen Hintergrund zu lehren, ein schwerwiegender Irrtum und ein strategischer Fehler ist [1].

1.1 Zum Stand der mathematikgeschichtlichen Forschung

Über die sog. *geometrische Algebra* schrieb O. Neugebauer[2] :

> Die Antwort auf die Frage, wo der Ursprung aller grundlegenden Probleme in der geometrischen Algebra liegt, nämlich in den Flächenumwandlungen von Euklid (II, 1–10) bzw. Euklid (VI, 24–29), kann heute vollständig gegeben werden: sie liegen einerseits in den Bedürfnissen der Griechen, die generelle Gültigkeit ihrer Mathematik im Kielwasser der aufkommenden Irrationalitäten zu sichern, andererseits in der sich ergebenden Notwendigkeit die Resultate der vorgriechischen Algebra zu übersetzen. Ist einmal das Problem auf diese Art formuliert, erweist sich alles als trivial und liefert einen nahtlosen Übergang von der babylonischen Algebra zu den Formulierungen Euklids.

Diese Auffassung, dass Euklids Flächenumwandlungen eine Form von versteckter Algebra darstellen, wurde weitgehend Allgemeingut, wie man den Schriften von H. G. Zeuthen und B. L. van der Waerden entnehmen kann. Zeuthen schreibt ähnlich in seiner Schrift[3] über die Kegelschnitte:

[1] R. L. Hayes: 6th International Congress on Mathematical Education, Budapest 1988.
[2] O. Neugebauer: *Zur geometrischen Algebra.*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B3, 254–259, Springer 1941.
[3] H. G. Zeuthen: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen 1886, S. 1.

D. Herrmann, *Die antike Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-642-37612-2_1,

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

> Obwohl die Griechen nicht den Begriff des Koordinatensystems hatten, würden sie rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten verwenden … Die Theorie der Proportionen würde ihnen erlauben, die wichtigsten algebraischen Operationen auszuführen. … Die geometrische Algebra habe zu Euklids Zeiten eine solche Entwicklung erreicht, dass sie dieselben Aufgaben verrichten konnte wie unsere Algebra, solange diese nicht über die Behandlung von Ausdrücken zweiten Grades hinausgeht(!)

Auch B. L. van der Waerden setzt in seinem bekannten Buch *Science Awakening* [116, S. 119] die obengenannten Flächenumwandlung von Euklid gleich mit der Anwendung der heutigen binomischen Formeln wie $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Dieser Auffassung bereitete ein grundlegender Artikel[4] des Israelis Sabetai Unguru ein Ende. Ein Großteil seiner Attacke betraf die lang etablierte Lehrmeinung über die griechische *geometrische Algebra*. Einen Vorläufer in dieser Debatte hatte Unguru in Jacob Klein [90, S. 5], der bereits 1965 schrieb:

> Die meisten Geschichtsdarstellungen versuchen die griechische Mathematik mit Hilfe der modernen Symbolik zu erfassen, als wäre dies nur eine äußere Form, die man für beliebige Inhalte maßschneidern könne.Selbst wenn die Nachforschungen auf einem wahren Verständnis der griechischen Wissenschaft beruhen, wird man erkennen, dass die Untersuchung auf einem Erkenntnisniveau verläuft, das durch moderne Vorstellungen geprägt ist.

Auch A. Szabo, der sich in seinem Buch [111, S. 457] schon 1969 gegen die Thesen von O. Neugebauer wandte:

> (1) Selbst wenn wir glauben, dass es eine babylonische Algebra wirklich gegeben hat, auch dann hat man bisher noch *mit keiner konkreten Aufgabe* wahrscheinlich machen können, dass die Griechen in voreuklidischer Zeit eine solche Algebra wirklich gekannt hätten.
> (2) Jene Sätze bei Euklid, die man gewohnt ist, als algebraische Sätze in geometrischem Gewand anzusehen, haben mit der Algebra in Wirklichkeit nur so viel zu tun, dass wir in der Tat sehr leicht *unsere algebraischen Äquivalente für diese Sätze* angeben können.

Den Begriff der geometrischen Algebra nannte Unguru ein *Fantasiegespinst, ein monströses Zwittergeschöpf, das sich Mathematiker ausgedacht haben, denen jegliches Gefühl für Historie fehlt*. Dieser Begriff dürfe auf keinen Fall auf die babylonische oder griechische Mathematik angewendet werden.

> Diese historiografische Auffassung, die sich hinter dem Begriff „geometrische Algebra“ verbirgt, ist anstößig, naiv und historisch nicht haltbar. Historische Mathematiktexte unter dem Blickwinkel moderner Mathematik zu betrachten, ist die sicherste Methode, das Wesen der antiken Mathematik zu mißverstehen, bei der philosophische Voreinstellungen und metaphysische Verflechtungen eine sehr viel grundlegendere und bedeutsamere Rolle gespielt haben als in der modernen Mathematik. Die Annahme, man könne automatisch und unterschiedslos auf jeden mathematischen Inhalt die moderne algebraische Symbolik anwenden, ist der sicherste Weg, die innewohnenden Unterschiede zu missverstehen, die in der Mathematik vergangener Jahrhunderte inbegriffen sind. Geometrie ist keine Algebra!

[4] S. Unguru: *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics*: Archive for the History of Exact Sciences 15 (1975), 67–114.

Später ergänzt er an gleicher Stelle:

> Es ist beklagenswert und traurig, wenn ein Student der antiken Kulturgeschichte sich erst mit den Bezeichnungsweisen und Operationen der modernen Mathematik anfreunden muss, um zu verstehen, welche Bedeutung und Intentionen moderne Kommentatoren in die alten Texte hineininterpretieren. … Das Ziel dieser sog. historischen Studien ist wohl zu zeigen, wie die antiken Mathematiker ihre modernen Ideen und Prozeduren verstecken unter einem Deckmantel von unbeholfenen, peinlichen, antiquierten und altmodischen Ausdrucksweisen. Mit anderen Worten ist es wohl Aufgabe eines Mathematik-Historikers, die alten mathematischen-Texte zu entwirren, sie in die moderne Sprache der Mathematik umzusetzen, damit sie für alle Interessenten verfügbar werden.

Seine Feststellung, dass diese Vorgehensweise *anachronistisch* und *unhistorisch* ist und deshalb die ganze griechische Mathematik neu geschrieben werden müsse, entfachte wütende Reaktionen. Hans Freudenthal, Andre Weil und B. L. van der Waerden publizierten ihre Antworten in derselben Zeitschrift; der Protest führte dazu, dass die Schriftleitung der Zeitschrift weitere Beiträge Ungurus ausschloss.

In seiner Gegenoffensive hielt sich van der Waerden[5] nicht zurück:

> Unguru, wie viele Nicht-Mathematiker, überschätzt stark die Bedeutung der Symbolik in der Mathematik. Diese Leute sehen unsere Beiträge voller Formeln und meinen, dass diese Formeln den wesentlichen Inhalt des mathematischen Denkens ausmachen. Wir, die tätigen Mathematiker, wissen es besser, dass in vielen Fällen die Formeln nicht den wesentlichen Inhalt darstellen, sondern nur bequeme Hilfsmittel sind.

In einem Brief an den Herausgeber der Zeitschrift formulierte A. Weil[6]:

> Es empfiehlt sich die Mathematik zu beherrschen, bevor man sich mit ihrer Geschichte abgibt. … Die Bücher VII bis IX Euklids enthalten keinerlei Algebra und auch keine sog. *geometrische Algebra*. Es ist natürlich viel praktischer die algebraischen Operationen mit unseren Algebra-Symbolen zu betreiben, als mit Worten, wie Euklid es macht; genau wie es einfacher ist, mit Dezimalbrüchen (oder wie die Computer im Binärsystem) zu rechnen als mit den Brüchen Archimedes', das ändert jedoch nichts am Kern der Sache.

Der Brief Weils schließt mit folgenden Worten, die man wohl selten in einer mathematischen Zeitschrift findet:

> Wenn eine wissenschaftliche Disziplin, die zwischen zwei bereits existierende (seien sie A und B genannt) in gewissem Sinne vermittelnd tritt, sich neu etabliert, so schafft dies oft Raum für das Aufkommen von Parasiten, die unwissend sind in A und B, aber versuchen davon zu leben, indem sie die in A Tätigen einschüchtern, sie würden nichts von B verstehen und umgekehrt.

---

[5] B. L. van der Waerden: *Defense of a „Shocking Point of View"*, Archive for the History of Exact Sciences 15 (1976), 199–210.

[6] Andre Weil: *Who Betrayed Euclid? (Extract from a letter to the Editor),* Archive for the History of Exact Sciences 19 (1978), 91–93.

> Wir sehen leider, dass genau dies zurzeit passiert in der Geschichte der Mathematik. Laßt uns versuchen, diese Infektion zu stoppen, bevor sie unser Schicksal wird.

Unguru antwortet vier Jahre später in der Zeitschrift *Isis*[7]:

> Die meisten zeitgenössischen Mathematikhistoriker, Mathematiker seit Studientagen, nehmen schweigend oder auch explizit an, dass mathematische Ideen aus der Welt der Platonischen Ideen stammen, wo sie geduldig darauf warten, von dem genialen Geist eines tätigen Mathematikers entdeckt zu werden. … Verschiedene Formen desselben mathematischen Konzepts oder Vorgehens werden nicht bloß als mathematisch äquivalent, sondern auch als historisch gleichwertig betrachtet.

Einen Überblick über die damalige Auseinandersetzung bietet der Überblicksartikel[8] von D. E. Rowe. Andre Weil vertritt hier nach Rowes Ansicht die Philosophie des Bourbaki-Kreises. Er ist der Meinung, dass ein geringes Wissen über Gruppentheorie helfe, den Inhalt der Euklidischen Proportionentheorie (und anderes nebenbei) verständlich zu machen. Sein Ziel ist ein völlig anderes als die komplexen Probleme, die in den Büchern V und VII von Euklids *Elementen* auftreten, aufzuzählen. Dieser mathematische Block liefert zahlreiche, subtile Schwierigkeiten für unser Verständnis von griechischen Bezeichnungen von Zahlen, Größen und Verhältnissen und ihrer wechselseitigen Wirkungen, Schwierigkeiten, die auch heute noch Experten vor Rätsel stellen. Historiker neigen dazu, sich zu fragen, ob mathematische Konzepte immer eine eindeutige Bedeutung haben – unabhängig von dem kulturellen Umfeld, in dem sie entstehen. Weil ist nicht nur davon überzeugt, sondern auch der Meinung, dass er und andere Talentierte mithilfe der modernen Algebra imstande sind, die rätselhaften Problemen der Mathematikgeschichte zu lösen. Unguru nennt dieses Verhalten *ahistorisch*:

> Wenn Gelehrte fortfahren, die besonderen, spezifischen Eigenheiten einer mathematischen Epoche zu vernachlässigen, sei es aufgrund von explizit gegebenen oder als stillschweigend anerkannten Prinzipien, dann ist ihre Arbeit *ahistorisch* und sollte als eine solche von der Historikergemeinschaft gekennzeichnet werden.

Als Erwiderung von Unguru meldete sich I. Bashmakova[9] zu Wort, deren moderne Diophantos-Interpretation mehrfach kritisiert worden war. Nach einem Vergleich der chinesischen, indischen und griechischen Mathematik kommt sie mit van der Waerden zu dem Schluss, dass in *allen* erwähnten Mathematiken die binomischen Formeln stets in Form von geometrischen Flächenumwandlungen dargestellt worden sind, in Indien und China ohne Zusammenhang mit irgendwelchen geometrischen Theorema. Nur in Griechenland wurde die Geometrie auf Axiomen aufgebaut und weiter entwickelt, auch als Probleme mit der Inkommensurabilität auftauchten.

---

[7] S. Unguru: *History of Ancient Mathematics*: *Some Reflections on the State of Art*, Isis 70 (1979), 555–565.

[8] D. E. Rowe: *New Trends and Old Images in the History of Mathematics*, 1996; abgedruckt in Calinger [54].

[9] I. Bashmakova: *A new view of the geometric algebra of the ancients*, abgedruckt in [42].

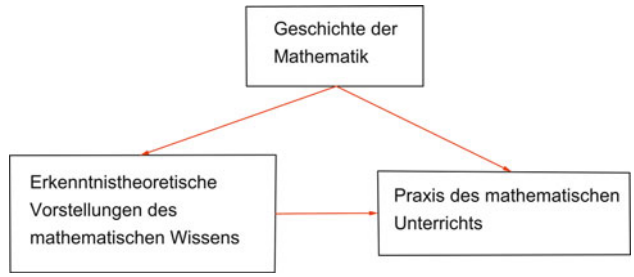

Abb. 1.1 Diagramm zur mathematischen Rezeption

Besonders I. Grattan-Guinness ging in einem Vortrag[10] mit Bashmakova hart ins Gericht, sie propagiere folgendes zweistufiges Vorgehen und widerspreche damit Unguru:

> Zuerst werde der [historische] Text in eine zeitgemäße mathematische Ausdrucksweise übersetzt; d. h. es wird ein äquivalentes Modell geschaffen. Dies sei absolut notwendig, um das eigentliche Verständnis des Textes zu entwickeln. Im nächsten Schritt sei es nötig, das betrachtete Werk in den mathematischen Kontext seiner Zeit einzubetten.

Die Bourbaki-Philosophie hatte nicht nur Einfluss auf die Rezeption der hier behandelten Mathematikgeschichte, sondern bewirkte auch in den 70er- und 80er-Jahren eine beträchtliche „Modernisierung" der Lehrpläne. Besonders bekannt wurde der Vortrag von J. Dieudonne[11], der unter dem Motto stand: **Euclid must go!** und einige radikale Hypothesen enthält.

(101) Diese Forderung mag vielleicht für einige ein Schock sein, aber ich möchte Ihnen mit einigen Details starke Argumente aufzeigen, die für diese These sprechen. Lassen Sie mich zuerst versichern, dass ich die tiefste Bewunderung für die Errungenschaften der griechischen Geometrie hege. Ich betrachte deren geometrische Erfindungen als die vielleicht außergewöhnlichste intellektuelle Leistung, die je von der Menschheit erbracht wurde. Dank des griechischen Geistes waren wir imstande, den hochragenden Bau der modernen Wissenschaft zu überblicken.

(102) Bis heute sind die grundlegenden Begriffe der Geometrie selbst ausgiebig analysiert worden, besonders seit der Mitte des 19. Jahrhunderts. Dies ermöglichte uns, für das Euklidische Werk einfache und robuste Grundlagen zu schaffen und so deren Bedeutung, in Bezug auf die moderne Mathematik neu zu formulieren; dabei werden ihre Fundamente getrennt von der ungeordneten Menge von Resultaten, die keinerlei Relevanz haben, außer, dass sie verstreute Relikte von unzulänglichen Methoden oder einer veralteten Herangehensweise sind.

(103) Das Ergebnis mag vielleicht ein wenig bestürzend sein. Laßt uns annehmen – um die Argumentation zu vereinfachen –, dass die Euklidische Geometrie der Ebene für Fremde aus einer anderen Welt gelehrt werden soll, die noch nie davon gehört haben oder

[10] Grattan-Guinness Ivor: History or Heritage? An important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education, American Mathematical Monthly 111(1), 1–12 (2004), abgedruckt in [50].
[11] J. Dieudonne: *New Thinking in School Mathematics, Organization for European economic, cooperation*, 1961.

nur Einblick haben wollen in mögliche Anwendungen der modernen Forschung. Dann denke ich, könnte der ganze Kurs in zwei bis drei Stunden in Angriff genommen werden – eine Stunde wird benötigt mit der Beschreibung des Axiomensystems, eine weitere mit nutzbaren Konsequenzen und die dritte möglicherweise mit einigen leichten, interessanten Übungen.

(104) Alles andere, das nun ganze Bände elementarer Geometrie füllt und dabei meine ich, zum Beispiel alles über Dreiecke (es ist vollkommen durchführbar und erwünscht, die ganze Theorie zu erläutern, ohne dabei überhaupt ein Dreieck zu definieren!), fast alles über Kreisinversionen, Büschel von Kreisen und Kegelschnitten usw., all dies hat soviel Relevanz für das, was (reine und angewandte) Mathematik heute ausmacht, wie Magische Quadrate oder Schachprobleme!

Ein abschließender Überblick über den aktuellen Stand der Diskussion findet sich bei N. Kastanis[12] und Y. Thomaidis.

1.2 Zum Inhalt des Buchs

Kapitel 2 schildert das Aufkommen einer neuen griechischen Kultur, die zu einem Neubeginn der griechischen Zivilisation führt, die später in ganz Europa bestimmend wird. Mit dem Aufkommen der Wissenschaften entwickelt sich auch die Mathematik.

Die Kap. 3 bis 5 behandeln die Anfänge der Mathematik durch die Pioniere Thales, Pythagoras und Hippokrates, die allesamt von den ionischen Inseln bzw. Küstenstädten stammen.

Die Kap. 6 bis 8 berichten, wie Athen durch Errichtung der Akademie und des Lykeions zum wissenschaftlichen Zentrum wird. Obwohl Platon und Aristoteles keine eigentlichen Mathematiker waren, gingen von ihnen ganz entscheidende Impulse für die Mathematik aus.

Nach dem Tod von Alexander d. Gr. zerfällt sein Herrschaftsbereich in einzelne Satrapen- bzw. Diadochenreiche. Wie die Symbiose aus griechischer und ägyptischer Kultur unter dem Herrscherhaus der Ptolemäer aus der neuen Hauptstadt Alexandria ein Handels-und Wissenschaftszentrum macht, schildert Kap. 9. Alexandria bietet bis zur römischen Eroberung die ideale Wirkungsstätte für eine ganze Reihe berühmter Mathematiker wie Euklid (Kap. 10), Archimedes (Kap. 13), Eratosthenes (Kap. 14) und Apollonios (Kap. 16).

Die drei klassischen Probleme wie Würfelverdopplung, Winkeldreiteilung und Quadratur des Kreises sind als Themenbereiche in Kap. 12 zusammengefasst. Angeschlossen sind noch die Konstruierbarkeit der regulären Polygone und die Quadratur der sog. Möndchen, die Hippokrates kunstvoll entwickelte, um damit die Quadratur des Kreises zu finden.

[12] N. Kastanis, Y. Thomaidis, The Term Geometrical Algebra, Target of a Contemporary Epistomological Debat, users.auth.gr/~nioka/files/geomalge.pdf [01.03.2013].

Kapitel 15 bietet einen allgemeinen Überblick über die Geometrie der Kegelschnitte, die sich nicht mehr in den Lehrplänen der weiterführenden Schulen findet. Es dient als Vorbereitung für das folgende Kapitel zu Apollonios von Perga (Kap. 16).

Auch nach der Eingliederung ins Römische Reich wirkte Alexandria noch lange als Ausbildungszentrum und Werkstatt berühmter Naturwissenschaftler. Zu nennen sind hier Astronomen wie Aristarchos und Hipparchos (Kap. 17) sowie Klaudios Ptolemaios (Kap. 19), Ingenieure wie Ktesibos und Heron (Kap. 18) und die Mathematiker Menelaos, Diophantos (Kap. 22), Pappos von Alexandria (Kap. 23). Besprochen werden auch die wenig bekannten Gelehrten wie Nikomachos von Gerasa (Kap. 20), Theon von Smyrna (Kap. 21) und Theon von Alexandria (Kap. 24), die keine primären Mathematiker waren.

Wie schon im ersten Teil der Einleitung ausgeführt, ist es problematisch, antike Mathematik mit modernen Formeln zu beschreiben; die Leserin bzw. der Leser wird durch den Hinweis *in moderner Schreibweise* an den Sachverhalt erinnert. Aus Gründen der Lesbarkeit und Straffung des Textes ist es nicht möglich, alle Rechenschritte *im alten Stil* nachzuvollziehen; deshalb werden an wenigen Stellen des Buchs Hilfsmittel der höheren Mathematik eingesetzt. Auch die Verwendung der den Griechen unbekannten trigonometrischen Funktionen konnte nicht vermieden werden, da die ausschließliche Verwendung der Sehnenfunktion das Lesen des Textes erschwert. Einige benötigte Sätze aus der Zahlentheorie und Kegelschnittlehre werden im Kap. 10 und 15 bereitgestellt.

Für verschiedene Namen gibt es konkurrierende Formen im Griechischen und Lateinischen. Hier werden in der Regel die griechischen Namen verwendet wie *Nikomachos* statt Nicomach, *Diophantos* statt Diophantosus oder *Ptolemaios* statt Ptolemäus. Gängige Namen werden aber verwendet, wie Euklid statt *Eukleides* oder Alexandria statt *Alexandreia*. Bei Recherchen in Bibliotheken oder Buchkatalogen wird meist der lateinische Namen im Genitiv, wie *Apollonii Pergaei quae graeci exstant, verwendet*. Obwohl es ein wissenschaftliches Regelwerk zur Transkription aus dem Arabischen gibt, findet sich in der Literatur keine einheitliche Schreibweise der arabischen Namen.

Die Bibliografie enthält vornehmlich Primärquellen entweder in lateinischer Sprache oder in einer maßgeblichen englischen Übersetzung. Sofern kein deutschsprachiges Werk zitiert ist, stammen alle Übersetzungen aus dem Lateinischen und Englischen vom Autor. Bei Hinweisen auf Euklid, Apollonios usw. geben die römischen Zahlen stets das Buch (übernommen von der Papyrusrolle) an, die lateinischen den Lehrsatz bzw. Paragrafen. Euklid (I, 47) ist also der Lehrsatz 47 im ersten Buch der *Elemente,* der wohlbekannte Satz des Pythagoras. Kommentare und Erläuterungen des Autors stehen in eckigen Klammern. Die Platon- und Aristoteles-Hinweise werden in der üblichen Nummerierung nach Stephanus bzw. Bekker gegeben. Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis. Die wichtigsten Fragmente von Aetius, Simplikios u. a., auch die nach Diels-Kranz (DK) genannten, der Vorsokratiker und Pythagoreer finden sich in dem hervorragenden Sammelband [33].

Dieses Buch ist aus Aufzeichnungen und Notizen hervorgegangen, die der Autor in mehreren Jahren gesammelt hat, in dem Wunsch, das Material in einem gut lesbaren, historisch bebilderten Band in moderner, kritischer Darstellung zu vereinen. Es ist natürlich

unmöglich, alle mathematischen Leistungen dieses Jahrtausends aufzuzählen; aus Umfangsgründen erfolgt eine exemplarische Beschränkung auf bestimmte, für den jeweiligen Autoren typische, Fragestellungen. Dabei wird eine Fülle von Konstruktionen, Aufgaben und Algorithmen vorgestellt, die zur Eigenbeschäftigung und zur Verwendung im Unterricht anregen soll. Eine Vielzahl von Abbildungen erleichert das Verständnis des Stoffs. Wie weit es gelungen ist, das Mosaik der griechischen antiken Mathematik Steinchen für Steinchen zusammenzusetzen und ihre Gelehrten in ihrem sozio-kulturellen, politischen und religiösen Kontext lebendig werden zu lassen, möge die geneigte Leserin bzw. der geneigte Leser entscheiden.

Der Autor dankt dem Verlag für die Bereitschaft, dieses Buch in Farbe und digitaler Form herauszugeben!

Abbildungsnachweis

Folgende Abbildungen sind den Wikimedia Commons entnommen:
Abb. 3.1; 4.1; 4.15; 9.1; 10.1; 10.2; 10.3; 10.4; 11.1; 13.1; 18.1; 19.1; 23.22; 23.23; 24.1; 24.2; 26.3.
Folgende Abbildungen sind gemeinfrei (Public domain):
Abb. 2.1; 2.2; 2.3; 3.4; 6.1; 7.7; 7.8; 7.12; 8.1; 13.29; 14.3; 19.2; 26.1; 26.4; 26.5.
Alle anderen Abbildungen stammen vom Verfasser.

Wie die griechische Wissenschaft begann

2

Das Staunen ist die Einstellung eines Menschen, der die Weisheit wahrhaft liebt, ja es gibt keinen anderen Anfang der Philosophie *als diesen.*
(Platon: Theaitetos 155)

Der 1628 v. Chr. erfolgte Vulkanausbruch von Thera mit der achtfachen Energie des Krakatau-Ausbruchs erzeugte einen Tsunami von über 30 m Wellenhöhe und vernichtete vielfaches Leben und einen Großteil der am Wasser gelegenen Gebäude. Die mächtigen Paläste der mykenisch-minoischen Kultur, wie Mykene, Tirnys und Knossos blieben erhalten, wurden aber nach 1200 v. Chr. zerstört und verlassen.

Um 1200 v. Chr. kam es nacheinander zur Einwanderung der indogermanischen Stämme Ionier, Achäer und Dorer vermutlich aus dem Balkan. Der Historiker Thukydides (I, 12) setzt in seinen *Historiae* die beiden ersten Einwanderungswellen auf 60–80 Jahre nach dem Trojanischen Krieg an, also auf etwa 1120 v. Chr. Die Dorer eroberten mit Eisenwaffen einen Großteil des griechischen (noch in der Bronzezeit lebenden) Festlands und gründeten Sparta. Dabei vertrieben sie die am Festland lebenden Achäer und Ionier auf die griechischen Inseln und an die kleinasiatische Küste, die damals von Persern, Lydern und Medern bewohnt war. (Abb. 2.1) Herodot berichtet über diese Völkerwanderung, dass die Ionier

> ihre Städte in einer Gegend gegründet hätten, die das angenehmste Klima im ganzen bekannten Erdkreis hätten.

Pausanias bemerkt in seiner *Beschreibung Griechenlands*:

> Das Land der Ionier erfreut sich des günstigsten Klimas; es hat Heiligtümer, wie man sie nirgends findet… Die Wunderwerke in Ionien sind zahlreich und stehen denen im (sonstigen) Griechenland kaum nach.

D. Herrmann, *Die antike Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-642-37612-2_2,
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

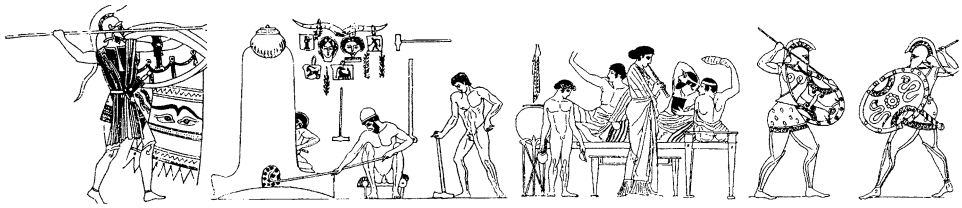

Abb. 2.1 Ausschnitte aus griechischen Vasenbildern

Bis etwa 700 v. Chr. waren die meisten Stadtstaaten (*polis*) gegründet, die im Lauf der Zeit zu wirtschaftlichen und kulturellen Zentren heranwuchsen. Zunächst war Sparta führend im Peloponnesischen Bund. Erfindungsreichtum und handwerkliche Geschicklichkeit sowie die Verfügbarkeit von Sklaven, ermöglichten den Griechen Schiffbau, Bergbau, Metallverarbeitung, Töpferei und Weberei zu betreiben. Dies geschah so erfolgreich, dass die Produktion den Eigenverbrauch überstieg. Als Folge entwickelte sich eine rege Handelstätigkeit im Mittelmeerraum, die die Gründung von Niederlassungen und Kolonien an den Küsten des Schwarzen Meeres, in Süditalien und sogar in Südfrankreich nach sich zog. Ebenfalls entstanden Handelsvertretungen in Persien, Ägypten und Nordafrika.

Konkurrenten waren insbesondere die Phöniker, die im Gebiet des heutigen Libanon lebten und ebenfalls den Mittelmeerraum kolonisierten. Handelszentrum der Phöniker war Tyros; die weltweiten Handelsbeziehungen Tyros' sind ausführlich in der Bibel beschrieben (Hesekiel 27, 33):

> Wer konnte sich je mit Tyrus vergleichen, der starken Stadt, von Wogen rings umspült? Der Wohlstand vieler Völker kam zu dir, und mancher König wurde durch dich reich, als noch dein Handel auf den Meeren blühte…

Das um 900 v. Chr. als Kolonie gegründete Karthago übernahm später die phönizischen Besitzungen und wurde so mächtig, dass es erst nach drei Punischen Kriegen von den Römern besiegt wurde (Ende 146 v. Chr.).

Neben dem kaufmännischen Gewinn kam es auch zu einem regen Kulturaustausch mit den genannten Völkern. So übernahmen die Griechen die erfolgreichste Erfindung der Phöniker, nämlich die Schriftzeichen des Alphabets. Im Gegensatz zu den semitisch-arabischen Sprachen, die nur Konsonanten schreiben, glänzte das Griechische durch seine Vokalisierung. Die Dichtungen des Homer, entstanden im Ionien des achten und siebten Jh. v.Chr., wurden zunächst nur mündlich überliefert, sorgten aber später bei ihrer Aufzeichnung für eine einheitliche Sprache. Bei den Olympischen Spielen, die zunächst unregelmäßig ab 772 stattfanden, gab es einen Sängerwettbewerb mit der Darbietung der *Ilias* und *Odyssee*. Den semitischen Einfluss bei der Schriftfindung erkennt man an den zuerst in Milet verwendeten Schriftzeichen (siehe Anhang), die zugleich einen Zahlenwert repräsentieren. Da das griechische Alphabet nur 24 Buchstaben hat, fehlen für die 27 Zahlzeichen (1, 2, 3, 9; 10, 20, 30, …, 90; 100, 200, 300, 900) drei Symbole. Man wählte hier die

Abb. 2.2 Ausschnitt aus der Darius-Vase

Ersatzzeichen ϛ (stigma) für 6, qoppa für 90 und ϡ (sampi) für 900. Diese milesischen Zahlzeichen kann man auch auf dem Ausschnitt aus der berühmten *Darius-Vase* (Neapel) erkennen, bei dem ein bärtiger, persischer Schatzmeister von Dareios' Kriegsrat auf einen Tisch vor ihm schreibt. Neben ihm befinden sich zwei Gesandte in asiatischen Gewändern, die Tribut zahlen in Form von Abgaben und Geld (Abb. 2.2). Die Einführung von Geldmünzen wurde um 650 v. Chr. von den benachbarten Lydern übernommen.

Man schätzt, dass von der Athener Bevölkerung zur Zeit des Themistokles (um 500) nur etwa die Hälfte, im juristischen Sinne betrachtet, Freie waren; von diesen wiederum hatte nur ein knappes Drittel das athenische Bürgerrecht. Nur diese Minderheit konnte das Wahlrecht ausüben und politische Ämter übernehmen. Wie in der Polis, so bildete sich auch in den griechischen Kolonien eine Oberschicht heraus, die aufgrund ihres Einflusses und ihres Reichtums nicht mehr von ihrer Hände Arbeit leben musste. Diese privilegierte Schicht hatte Zeit und Geld, sich mit Kunst, Kultur und Philosophie zu beschäftigen.

Unter den Städten, die am meisten vom Handel profitierten, war Milet, das in Ägypten sogar über eine eigene Handelsniederlassung namens Naukratis verfügte. Milet bildete mit Chios, Ephesus, Samos u. a. den sog. *Ionischen Bund*. Dessen bekannteste Siedlungen in Süditalien waren Kroton, Megapont und Tarent, die später die Wirkungsstätten der Pythagoreer wurden (vgl. Landkarte im Anhang). Die Seeleute und Händler Milets konnten daher ein reiches Wissen an Seefahrt, Astronomie, Länder- bzw. Völkerkunde und Geografie in Erfahrung bringen. Während der Perserkriege (500–479) wurde Milet zunächst noch geschont, sodass es weiterhin lukrativen Handel treiben konnte. Nach dem Ionischen Aufstand unter der Führung Milets gegen die Perser wurde die Stadt 496 jedoch dem Erdboden gleichgemacht. Nach dem Wiederaufbau war Milets Vormachtstellung gebrochen und es wurde im gegen Persien gerichteten Ersten Attischen Seebund tributpflichtig gegen Athen (ab 477).

In dem oben geschilderten günstigen Umfeld trat in der *Ionischen Phase* (7. bis 5. Jahrhundert) eine Gruppe von herausragenden Persönlichkeiten an der ionischen Küste auf, deren Weltbild nicht länger durch die überlieferten Mythen über Götter bestimmt wurde. Vielmehr versuchten sie durch rationales Denken eine umfassende Erklärung der irdischen und astronomischen Naturerscheinungen zu geben; dies war die Geburtsstunde der Naturphilosophie, in der englischen Literatur *The Greek Miracle* genannt. Warum dieses Ereignis dort und zu diesem Zeitpunkt stattfand, hat eine Unzahl von Kommentaren her-

vorgebracht, mit denen man ganze Bibliotheken füllen könnte. Der berühmte Philosoph und Mathematiker B. Russell[1] beginnt seine *Philosophie des Abendlandes* mit den Worten:

> In der ganzen Weltgeschichte ist nichts so überraschend oder so schwer erklärlich wie das plötzliche Aufblühen der Kultur in Griechenland. … Vieles … hatte es zuvor in Ägypten und Mesopotamien gegeben. Aber gewisse, bislang fehlende Elemente trugen erst die Griechen bei. … Was sie auf dem Gebiet des reinen Denkens geleistet haben, ist einzigartig.

Im Vorwort seines Werks *Vom Ursprung und Ziel der Geschichte* (1949) schreibt Karl Jaspers:

> Diese Achse der Weltgeschichte scheint um 500 v. Chr. zu liegen, in dem zwischen 800 und 200 stattfindenden geistigen Prozess. Dort liegt der tiefste Einschnitt der Geschichte. Es entstand der Mensch, mit dem wir heute leben.

Den Fokus auf Griechenland zu legen, stellt bei Jaspers einen Eurozentrismus dar, da man dabei die gleichwertige Entwicklung in China und Japan vergesse. Eine neuere, ausführliche Diskussion darüber findet man bei H. Heit[2] in dem schönen Buch *Der Ursprungsmythos der Vernunft*. Die These des Eurozentrismus beinhaltet, die Mathematik sei im wesentlichen in Griechenland und mithilfe des Islam nach lateinischer Übersetzung ins Abendland gelangt.

Die Philosophen dieser Zeit werden heute meist als Vorsokratiker bezeichnet. Unter diesen weisen Männern befanden sich Thales von Milet und Pythagoras von Samos, die die Mathematik als Wissenschaft begründeten. Über die Babylonier und Ägypter hinausgehend, die Tontafeln und Papyri mit bloßen Zahlenbeispielen füllten, versuchten sie Lehrsätze aufzustellen und allgemeine Zusammenhänge zu finden.

2.1 Die Entstehung der Mathematik

> Als der sokratische Philosoph Aristippos bei einem Schiffbruch
> an die Küste von Rhodos geworfen, dort geometrische Figuren
> hingezeichnet sah, soll er seinen Gefährten zugerufen haben:
> Laßt uns guten Mutes sein, ich sehe Spuren von Menschen!
> (Marcus Vitruvius Pollio: *De Architectura*, Vorwort Buch VI)

Mathematik bedeutete ursprünglich *Das, was man lernen muss* (= μαθεσις oder μαθεμα); Wortstamm ist μανθανειν (= lernen). Eine typische Unterrichtsszene (mit Rezitation, Schreiben und Musik) zeigt der Ausschnitt aus der berühmten Duris-Vase (Berlin F 2285) (Abb. 2.3).

[1] Bertrand Russell: *Philosophie des Abendlandes*, Übersetzung Fischer-Werneke/Gillischewski, Piper 2004.

[2] Helmut Heit: *Der Ursprungsmythos der Vernunft – Zur philosophiehistorischen Genealogie des griechischen Wunders*, Königshausen & Neumann 2007.

Abb. 2.3 Unterrichtsszenen von der Duris-Vase

Platon verwendet den Begriff in *Timaios* (88c) teilweise noch in der ursprünglichen Bedeutung. Unter den Pythagoreern und später unter Aristoteles gewinnt das Wort *Mathematik* die speziellere Bedeutung von heute. Ein Zitat von Anatolius ist bei den Definitionen Herons [18, IV] überliefert:

> Warum hat Mathematik diesen Namen? Die Peripatiker sagen, während man die Rhetorik, die Dichtung und die populäre Musik praktizieren könne, ohne sie studiert zu haben, so könne niemand das, was Mathematik genannt wird, verstehen, ohne es zuerst zu studieren. So erklären sie, warum die Theorie dieser Gegenstände *Mathematik* genannt wird.

Über die Entstehung der Mathematik berichtet Aristoteles in *Metaphys*. (891b)

> Und werden dann mehrere Künste erfunden, die einen für die unumgänglichen Notwendigkeiten des Lebens, andere aber für eine gehobene Lebensführung, so halten wir die letzteren gerade deshalb, weil ihr Wissen nicht auf den Nutzen abzielt, für weiser als die ersteren. Erst als bereits alle derartigen Künste entwickelt waren, entdeckte man die Wissenschaften, die sich nicht allein auf die Lust und die Lebensnotwendigkeiten bezogen und das erstmals in den Gebieten, wo man sich Muße leisten konnte. Daher entstanden auch die mathematischen Wissenschaften in Ägypten, denn dort gestattete man dem Priesterstand, Muße zu pflegen.

Heron schlüsselt die mathematischen Wissenschaften auf:

> Mathematik ist eine Wissenschaft, die sowohl durch Denken wie auch durch die Sinne Faßbare untersucht, um das in ihr Gebiet fallende festzulegen. … Der edleren und höchsten gibt es zwei Hauptteile, Arithmetik und Geometrie, der mit dem Sinnlichen sich beschäftigenden aber sechs: Rechenkunst, Feldmessung, Optik, Musiktheorie, (theoretische) Mechanik und Astronomie. Weder die sog. Taktik, noch die Baukunst, noch die populäre Musik oder das Kalenderwesen sind Teile der Mathematik, auch nicht die (praktische) Mechanik.

Die griechische Mathematik war vor allem Geometrie, systematisch angeordnet von Euklid und auf Kegelschnitte erweitert durch Apollonios. Die *Zahlentheorie* diente vor allem den Pythagoreern als Schlüssel zur Erklärung der Welt. Eine Vorstufe des Gebiets, das später Algebra bzw. Zahlentheorie genannt wird, findet sich bei Diophantos, der bereits mit einer Unbekannten lineare und höhere Gleichungen löst. Arithmetik im Sinne

der Pythagoreer wird von Nikomachos von Gerasa betrieben. Numerische Rechnungen im großen Umfang werden im babylonischen Hexagesimalsystem ausgeführt, bei der Wurzelrechnung des Heron von Alexandria und bei Berechnung der Sehnentafel von Klaudios Ptolemaios. Über die Geometrie berichtet Heron im Vorwort zu seiner Schrift *Geometrica*:

> Wo die Grundlagen der Geometrie herstammen, lässt sich mithilfe der Philosophie zeigen. Damit wir nicht gegen die Grundsätze verstoßen, ist es angebracht, die Definition der Geometrie zu erläutern. Die Geometrie ist also die Wissenschaft von Figuren und Größen und ihren Veränderungen und ihr Zweck ist, diese zu bewerkstelligen; die Methode aber ihrer Darstellung ist synthetisch: Sie beginnt mit dem Punkt, der ohne Ausdehnung ist und geht über Linie und Fläche in den Raum. Die Geometrie erreicht ihre Darstellung durch Abstraktion; sie behandelt zunächst den physikalischen Körper und seinen stofflichen Inhalt; durch Entfernen der Stofflichkeit erhält sie den mathematischen Körper, der räumlich ist. Durch fortgesetzte Abstraktion erreicht sie wieder den Punkt.

Die Entwicklung der Geometrie schildert Heron im Vorwort seiner *Metrica* [18, III]:

> In ihren Anfängen beschäftigt sich die Geometrie, wie die Erzählung der Alten uns lehrt, mit den Landvermessungen und Landteilungen, wovon sie aus Geometrie (= Landmessung) genannt ward. Da dies Geschäft für die Menschen nützlich war, wurde sein Gattungsbegriff erweitert, sodass die Handhabung der Messungen und Teilungen auch zu den festen Körpern fortschritt und da die zuerst gefundenen Sätze nicht ausreichten, so bedurften jene Operationen noch weiterer Forschung, sodass sogar bis zum gegenwärtigen Moment manches davon noch ungelöst ist, obwohl Archimedes und Eudoxos den Gegenstand trefflich behandelt haben.

Nach dem Ende der Perserkriege konnte Athen eine führende Stellung unter den griechischen Städten einnehmen. Während der Zeit des Perikles (ca. 495–429) war Athen nicht nur politisch, militärisch und wirtschaftlich führend, sondern es bildete ein Zentrum der Kunst und Wissenschaft. Es kam hier zur Gründung der Akademie und zum Bau der Akropolis. Die mathematische Lehre findet in diesem Zeitraum in der Akademie des Platon bzw. des Lykeion des Aristoteles statt; er wird daher die sog. *Athenische Phase* genannt. Die Machtstellung Athens forderte Sparta heraus. Der mit den Spartanern geführte Peloponnesische Krieg schwächte Athen so sehr, dass es ab 338 unter makedonischen Einfluss geriet.

Mit der Aufteilung des Alexander-Reiches nach dessen Tod (323 v. Chr.) kam es zur Blüte von Alexandria (eine der 11 von Alexander gegründeten Städte gleichen Namens), das nun Zentrum der mathematischen Gelehrsamkeit wurde. Hier wirkten am Museion und am Nachfolgeinstitut die Mathematiker Euklid, Eratosthenes und Apollonios. Archimedes arbeitete zwar in Syrakus, stand aber in engem Kontakt mit Alexandria. Der Zeitraum von 300–190, also bis zum Tod Apollonios', wird die *Alexandrinische Phase* genannt.

Nach dem Ende der Ptolemäer-Herrschaft und nach der Eingliederung Ägyptens ins Römische Reich, gab es noch eine sehr lange Phase von vier Jahrhunderten, in der namhafte Mathematiker in Alexandria wirkten, wie Heron, Klaudios Ptolemaios, Pappos, Diophantos und Theon mit Tochter Hypatia (letztere um 415). In Athen ist noch als vorletzter

Akademievorstand Proklos Diadochos (= *Nachfolger*) zu nennen, der mit seinen Euklid- und Platon-Kommentaren wertvolle mathematische Hinweise gibt (um 480). Diese Phase ist der *Niedergang der hellenistischen Mathematik*; die Antike war mit dem Zusammenbruch des Römischen Reiches im Jahre 476 beendet.

Das *Erbe der hellenistischen Mathematik* wurde in Rom, Konstantinopel und Bagdad verwaltet. Rom lernte die Arithmetik des *Nikomachos* in der lateinischen Übersetzung des Boethius kennen. In Konstantinopel ließ Leon, der Geometer, alle erreichbaren Werke des Archimedes vervielfältigen. In Bagdad veranlassten die Kalifen wichtige Werke von Euklid, Archimedes, Apollonios und Ptolemaios ins Arabische zu übersetzen und bewahrten damit wertvolle Schriften, die im griechischen Original im Laufe der Jahrhunderte verloren gingen. Ein Großteil dieser arabischen Schriften wurde später im Mittelalter bzw. in der Renaissance ins Lateinische übersetzt und somit für die Gelehrtenwelt Europas zugänglich.

Thales von Milet

3

3.1 Mathematisches Wirken

Thales von Milet (griechisch Θαλῆς ὁ Μιλήσιος) (640–546 v.Chr.) ist der erste namentlich bekannte Philosoph und Mathematiker. Nach Diogenes Laertios (I, 22) ist er Kaufmann gewesen, sodass er auf seinen Handlungsreisen auch nach Ägypten kam, wo er bei den Priestern die ägyptische Mathematik kennenlernte (Abb. 3.1). Nach Plutarch übertraf er bald seine Lehrer und bestimmte zur Überraschung des Pharao Ahmose II (570–526 v. Chr.) die Höhe der Pyramiden mithilfe eines Stabes durch einen Vergleich der Schattenlängen (Abb. 3.2). Plutarch schreibt in einem Text über Ahmose (griechisch *Amasis*):

> Obgleich er dich [Thales] auch um anderer Dinge willen bewundert, so schätzt er über alle Maßen die Messung der Pyramiden, dass du nämlich ohne alle Mühe und ohne ein Instrument zu benützen, indem du nur einen Stock in den Endpunkt des Schatten steckst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigst, dass der eine Schatten zum anderen das Verhältnis hat wie die Pyramide zum Stock.

Einen ähnlichen Bericht darüber gibt Plinius in seiner Naturgeschichte.

Thales wird von allen Autoren zu den Sieben Weisen Griechenlands gezählt. Er selbst nennt sich nur Freund (φιλοσ) der Weisheit (σοφια). Proklos, der noch die (später verloren gegangene) Mathematikgeschichte des Eudemos von Rhodos kennt, schreibt in seinem *Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen* [30] (um 450 n. Chr.) Thales die Kenntnis folgender Lehrsätze zu:

- Scheitelwinkel sind kongruent (Euklid I, 15).
- Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind kongruent (Euklid I, 5).

D. Herrmann, *Die antike Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-642-37612-2_3,
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

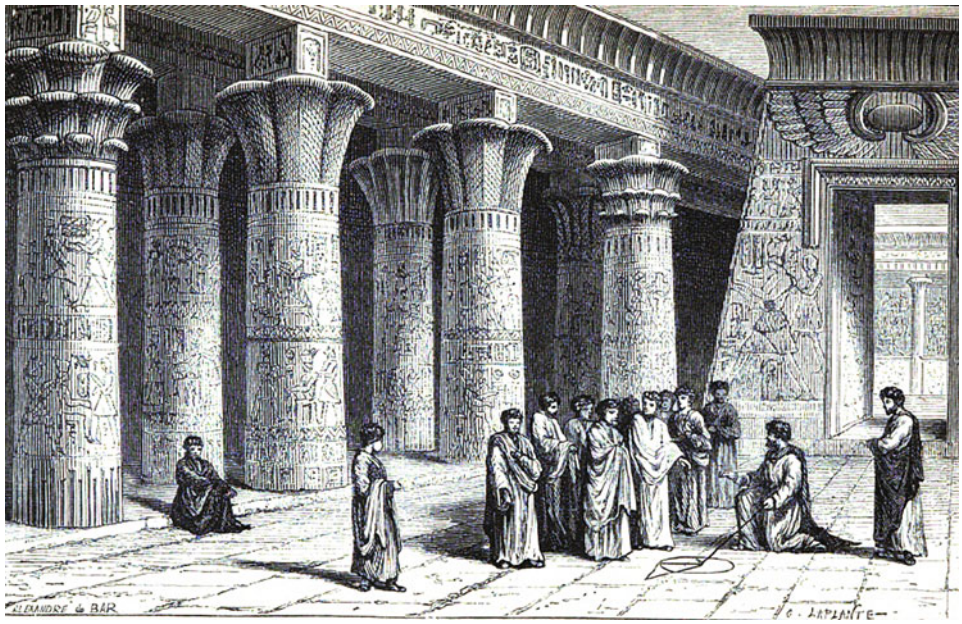

Abb. 3.1 Thales vor den ägyptischen Priestern

- Ein Dreieck ist eindeutig bestimmt durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (Euklid I, 26).
- Kreise werden durch ihren Durchmesser halbiert.
- Entsprechende Seiten ähnlicher Dreiecke stehen im selben Verhältnis (Euklid VI, 4).
- Der Umfangswinkel im Halbkreis ist ein Rechter (Euklid III, 31).

Da Thales lange in Ägypten gelebt hat, ist anzunehmen, dass seine mathematischen Kenntnisse ägyptisches Wissen widerspiegeln. Nach Meinung der Griechen lag der Ursprung der Mathematik in Ägypten. Platon lässt Sokrates in *Phaidros* (274c) sprechen:

> Ich habe also vernommen, zu Naukratis in Ägypten sei einer der dortigen alten Götter gewesen, dem auch der geheiligte Vogel, den sie wohl Ibis nennen, zugeeignet ist; dieser Götze aber habe selbst den Namen Thoth. Dieser habe zuerst die Zahl und das Rechnen erfunden, sodann Mathematik und Sternenkunde, ferner Brettspiel und Würfelspiel, ja auch sogar die Buchstaben.

Proklos schreibt über die Erkenntnisse Thales':

> Vieles entdeckte er selbst, von Vielem überlieferte er die Anfänge seinen Nachfolgern; das Eine machte er allgemeiner, das Andere mehr sinnlich fassbar.

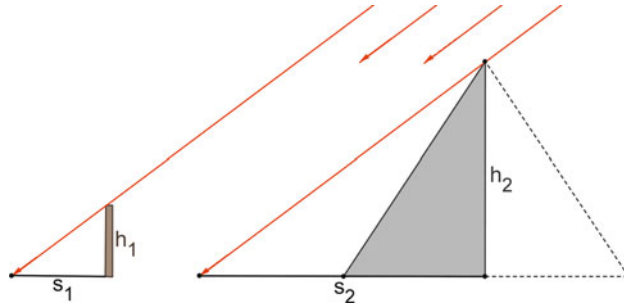

Abb. 3.2 Höhenmessung der Pyramide mittels Schattenstab

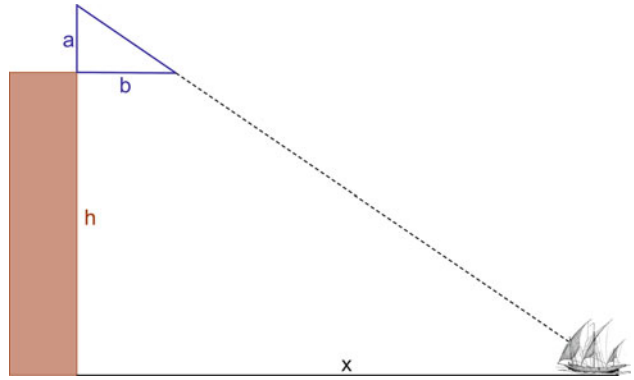

Abb. 3.3 Entfernungsmessung mittels Ähnlichkeitsprinzip

Thales wird meist als Begründer der griechischen Geometrie angesehen. Manche Autoren sind der Meinung, dass Thales mit dem nach ihm benannten Satz nichts zu tun habe, da der Beweis die Kenntnis der Innenwinkelsumme des Dreiecks voraussetze. Diese Erkenntnis kommt nach Eudemos erst den Pythagoreern zu (Euklid I, 32). Einen Ausweg dazu hat Th. Heath gefunden; nach seiner Ansicht reicht das Erkennen der Punktsymmetrie des Rechtecks im Umkreis zum Beweis aus.

Extrem kritisch äußert sich D. R. Dicks[1] in einem Artikel zu Thales. Er schreibt, die Berichte über ihn, die über 700 Jahre später geschrieben worden sind, *seien Anekdoten von wechselndem Grad der Plausibilität und historisch wertlos. Dies erkenne man daran, dass nicht einmal die Berichte über Grundtatsachen seines Lebens übereinstimmen. Generationen von Kompilatoren hätten Berichte ihrer Vorgänger fehlerhaft abgeschrieben und ihre Biografien ergänzt mit fiktiven Attributen; so sei mit der Zeit eine biografische Tradition entstanden, die eine scheinbare Authentizität besitzt. Auch sei es wahrscheinlich, dass die philosophischen Positionen, die ihm Aristoteles zuschreibt, in Wahrheit dessen eigene Interpretationen waren, die später in der doxografischen Tradition fehlerhaft Thales zugeschrieben wurden.* Die Kritik Dicks' ist sicher überzogen, da die Überlieferung von

[1] D. R. Dicks: Thales, The Classical Quarterly 11/59, 9, S. 294–309.

Texten nicht zielgerichtet erfolgt, sondern zufallsbestimmt und von den antiken Autoren nicht verlangt werden kann, neutral zu kommentieren. Sieben Jahre später bekräftigt Dicks[2] seine Ansichten in einem Kommentar zu einem Buch von S. Bochner. Eine Entgegnung zu Dicks schreibt M. Cornelius[3] in einem Reprint der Universität Köln. Den Ähnlichkeitssatz soll Thales angewandt haben bei der oben beschriebenen Höhenbestimmung der Pyramiden. Nur mithilfe des Kongruenzsatzes soll Thales nach Proklos die Entfernung von Schiffen in Milets Hafen aus gemessen haben. Wie das Bild zeigt (Abb. 3.3), bietet der Ähnlichkeitssatz eine sehr viel einfachere Lösung. Unklar ist, ob Thales einen Beweis für die angegebenen Lehrsätze geliefert hat. Die in Euklids *Elementen* verwendeten Beweise zu den oben erwähnten Sätzen schreibt Proklos allein dem Euklid zu.

Es sind keine Hinweise auf schriftliche Werke von Thales vorhanden; schon bei Platon oder Aristoteles fehlt ein jeglicher Hinweis auf eine Schrift von Thales. Aristoteles (Metaph. 983) berichtet aber über die – aus seinem Wirken entstehende – Schule von Milet, die sich unter den Nachfolgern Anaximander bzw. Anaximenes immer mehr der Philosophie widmet.

Eudemos zitiert zwei (inzwischen verloren gegangene) astronomische Werke *Über die Tag- und Nachtgleichen* bzw. *Über die Sonnenwenden*; diese werden von Diogenes Laertios (I, 23) dem Thales zugeschrieben. H. Diels verneint diese Zuordnung in seinen Fragmenten der Vorsokratiker.

3.2 Weitere Berichte über Thales

Thales wurde schon zu Lebzeiten berühmt durch seine Vorhersage der Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585 v. Chr. (Julianischer Kalender). Nach (Herodot 1,74) spielte diese Sonnenfinsternis eine entscheidende Rolle im Krieg zwischen den Medern und Lydern. O. Neugebauer streitet vehement ab, dass Thales selbst mit babylonischen Astronomiekenntnissen imstande gewesen wäre, das Datum und insbesondere die Sichtbarkeit in Kleinasien vorzusagen.

Populär ist seine von Platon *Theaitetos* (174a) überlieferte Anekdote, die er dem Sokrates in den Mund legt

> Wie auch Thales, ..., als er, um die Sterne zu beschauen, den Blick nach oben gerichtet in einen Brunnen fiel, soll eine artige und witzige thrakische Magd ihn verspottet haben, dass er, was am Himmel wäre, wohl strebte zu erfahren, was aber vor ihm läge und zu seinen Füßen, ihm unbekannt bliebe.

[2] D. R. Dicks: Commentary to Solomon Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton University 1966.
[3] www.rhm.uni-koeln.de/115/M-Cornelius.pdf [01.05.2013].