

J. Wittenburg · H. A. Richard  
J. Zierep · K. Bühler

Das  
Ingenieurwissen  
Technische  
Mechanik

Ingenieurwissen



Springer Vieweg

---

# Das Ingenieurwissen: Technische Mechanik

---

Jens Wittenburg · Hans Albert Richard ·  
Jürgen Zierep · Karl Bühler

# Das Ingenieurwissen: Technische Mechanik

 Springer Vieweg

Hans Albert Richard  
Universität Paderborn  
Paderborn, Deutschland

Karl Bühler  
Hochschule Offenburg  
Offenburg, Deutschland

Jens Wittenburg, Jürgen Zierep  
KIT Karlsruhe  
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-642-41121-2  
DOI 10.1007/978-3-642-41122-9

ISBN 978-3-642-41122-9 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das vorliegende Buch ist Teil des ursprünglich erschienenen Werks „HÜTTE - Das Ingenieurwissen“, 34. Auflage.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

---

## Vorwort

Die HÜTTE Das Ingenieurwissen ist ein Kompendium und Nachschlagewerk für unterschiedliche Aufgabenstellungen und Verwendungen. Sie enthält in einem Band mit 17 Kapiteln alle Grundlagen des Ingenieurwissens:

- Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundlagen
- Technologische Grundlagen
- Grundlagen für Produkte und Dienstleistungen
- Ökonomisch-rechtliche Grundlagen

Je nach ihrer Spezialisierung benötigen Ingenieure im Studium und für ihre beruflichen Aufgaben nicht alle Fachgebiete zur gleichen Zeit und in gleicher Tiefe. Beispielsweise werden Studierende der Eingangsemester, Wirtschaftsingenieure oder Mechatroniker in einer jeweils eigenen Auswahl von Kapiteln nachschlagen. Die elektronische Version der Hütte lässt das Herunterladen einzelner Kapitel bereits seit einiger Zeit zu und es wird davon in beträchtlichem Umfang Gebrauch gemacht.

Als Herausgeber begrüßen wir die Initiative des Verlages, nunmehr Einzelkapitel in Buchform anzubieten und so auf den Bedarf einzugehen. Das klassische Angebot der Gesamt-Hütte wird davon nicht betroffen sein und weiterhin bestehen bleiben. Wir wünschen uns, dass die Einzelbände als individuell wählbare Bestandteile des Ingenieurwissens ein eigenständiges, nützliches Angebot werden.

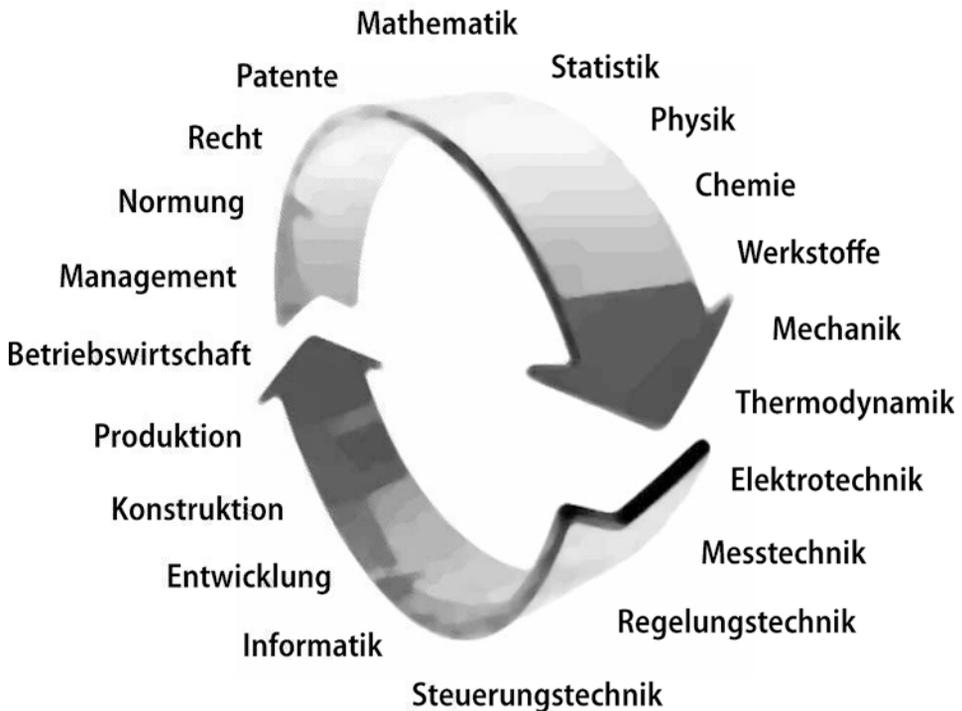
Unser herzlicher Dank gilt allen Kolleginnen und Kollegen für ihre Beiträge und den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Springer-Verlages für die sachkundige redaktionelle Betreuung sowie dem Verlag für die vorzügliche Ausstattung der Bände.

Berlin, August 2013

H. Czichos, M. Hennecke

Das vorliegende Buch ist dem Standardwerk *HÜTTE Das Ingenieurwissen 34. Auflage* entnommen. Es will einen erweiterten Leserkreis von Ingenieuren und Naturwissenschaftlern ansprechen, der nur einen Teil des gesamten Werkes für seine tägliche Arbeit braucht. Das Gesamtwerk ist im sog. Wissenskreis dargestellt.

## Das Ingenieurwissen Grundlagen



---

# Inhaltsverzeichnis

## *Technische Mechanik*

J. Wittenburg, H.A. Richard, J. Zierep, K. Bühler

### *Mechanik fester Körper*

J. Wittenburg, H.A. Richard

<b>1</b>	<b>Kinematik</b>	<b>1</b>
1.1	Kinematik des Punktes	1
1.1.1	Lage, Lagekoordinaten – 1.1.2 Geschwindigkeit, Beschleunigung	
1.2	Kinematik des starren Körpers	2
1.2.1	Winkel, Winkelgeschwindigkeit – 1.2.2 Winkelgeschwindigkeit – 1.2.3 Winkelbeschleunigung	
1.3	Kinematik des Punktes mit Relativbewegung	9
1.4	Freiheitsgrade der Bewegung, Kinematische Bindungen	10
1.5	Virtuelle Verschiebungen	10
1.6	Kinematik offener Gliederketten	11
<b>2</b>	<b>Statik starrer Körper</b>	<b>13</b>
2.1	Grundlagen	13
2.1.1	Kraft, Moment – 2.1.2 Äquivalenz von Kräftesystemen – 2.1.3 Zerlegung von Kräften – 2.1.4 Resultierende von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt – 2.1.5 Reduktion von Kräftesystemen – 2.1.6 Ebene Kräftesysteme – 2.1.7 Schwerpunkt, Massenmittelpunkt – 2.1.8 Das 3. Newton'sche Axiom „actio = reactio“ – 2.1.9 Innere Kräfte und äußere Kräfte – 2.1.10 Eingeprägte Kräfte und Zwangskräfte – 2.1.11 Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper – 2.1.12 Schnittprinzip – 2.1.13 Arbeit, Leistung – 2.1.14 Potenzialkraft, Potenzielle Energie – 2.1.15 Virtuelle Arbeit, Generalisierte Kräfte – 2.1.16 Prinzip der virtuellen Arbeit	
2.2	Lager, Gelenke	23
2.2.1	Lagerreaktionen, Lagerwertigkeit – 2.2.2 Statisch bestimmte Lagerung – 2.2.3 Berechnung von Lagerreaktionen	
2.3	Fachwerke	26
2.3.1	Statische Bestimmtheit – 2.3.2 Nullstäbe – 2.3.3 Knotenschnittverfahren – 2.3.4 Ritter'sches Schnittverfahren für ebene Fachwerke – 2.3.5 Prinzip der virtuellen Arbeit – 2.3.6 Methode der Stabvertauschung	
2.4	Ebene Seil- und Kettenlinien	27
2.4.1	Gewichtsloses Seil mit Einzelgewichten – 2.4.2 Schwere Gliederkette – 2.4.3 Schweres Seil – 2.4.4 Schweres Seil mit Einzelgewicht – 2.4.5 Rotierendes Seil	
2.5	Coulomb'sche Reibungskräfte	30
2.5.1	Ruhereibungskräfte – 2.5.2 Gleitreibungskräfte	
2.6	Stabilität von Gleichgewichtslagen	33
<b>3</b>	<b>Kinetik starrer Körper</b>	<b>33</b>
3.1	Grundlagen	33
3.1.1	Inertialsystem und absolute Beschleunigung – 3.1.2 Impuls – 3.1.3 Newton'sche Axiome – 3.1.4 Impulssatz, Impulserhaltungssatz – 3.1.5 Kinetik der Punktmasse im beschleunigten Bezugssystem – 3.1.6 Trägheitsmomente, Trägheitstensor – 3.1.7 Drall – 3.1.8 Drallsatz (Axiom von Euler) – 3.1.9 Drallerhaltungssatz – 3.1.10 Kinetische Energie – 3.1.11 Energieerhaltungssatz – 3.1.12 Arbeitssatz	
3.2	Kreiselmechanik	40
3.2.1	Reguläre Präzession – 3.2.2 Nutation – 3.2.3 Linearisierte Kreisgleichungen – 3.2.4 Präzessionsgleichungen	

3.3	Bewegungsgleichungen für holonome Mehrkörpersysteme . . . . .	43
	3.3.1 Synthetische Methode – 3.3.2 Lagrange'sche Gleichung – 3.3.3 D'Alembert'sches Prinzip	
3.4	Stöße . . . . .	45
	3.4.1 Vereinfachende Annahmen über Stoßvorgänge – 3.4.2 Stöße an Mehrkörpersystemen – 3.4.3 Der schiefe exzentrische Stoß – 3.4.4 Gerader zentraler Stoß – 3.4.5 Gerader Stoß gegen ein Pendel	
3.5	Körper mit veränderlicher Masse . . . . .	48
3.6	Gravitation, Satellitenbahnen . . . . .	49
3.7	Stabilität . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Schwingungen . . . . .</b>	<b>51</b>
4.1	Lineare Eigenschwingungen . . . . .	52
	4.1.1 Systeme mit einem Freiheitsgrad – 4.1.2 Eigenschwingungen bei endlich vielen Freiheitsgraden	
4.2	Erzwungene lineare Schwingungen . . . . .	54
	4.2.1 Systeme mit einem Freiheitsgrad – 4.2.2 Erzwungene Schwingungen bei endlich vielen Freiheitsgraden	
4.3	Lineare parametererregte Schwingungen . . . . .	59
4.4	Freie Schwingungen eindimensionaler Kontinua . . . . .	60
	4.4.1 Saite, Zugstab, Torsionsstab – 4.4.2 Biegeschwingungen von Stäben	
4.5	Näherungsverfahren zur Bestimmung von Eigenkreisfrequenzen . . . . .	63
	4.5.1 Rayleigh-Quotient – 4.5.2 Ritz-Verfahren	
4.6	Autonome nichtlineare Schwingungen mit einem Freiheitsgrad . . . . .	66
	4.6.1 Methode der kleinen Schwingungen – 4.6.2 Harmonische Balance – 4.6.3 Störungsrechnung nach Lindstedt – 4.6.4 Methode der multiplen Skalen	
4.7	Erzwungene nichtlineare Schwingungen . . . . .	69
	4.7.1 Harmonische Balance – 4.7.2 Methode der multiplen Skalen – 4.7.3 Subharmonische, superharmonische und Kombinationsresonanzen	
<b>5</b>	<b>Festigkeitslehre. Elastizitätstheorie . . . . .</b>	<b>71</b>
5.1	Kinematik des deformierbaren Körpers . . . . .	71
	5.1.1 Verschiebungen, Verzerrungen, Verzerrungstensor – 5.1.2 Kompatibilitätsbedingungen – 5.1.3 Koordinatentransformation – 5.1.4 Hauptdehnungen, Dehnungshauptachsen – 5.1.5 Mohr'scher Dehnungskreis	
5.2	Spannungen . . . . .	73
	5.2.1 Normal- und Schubspannungen, Spannungstensor – 5.2.2 Koordinatentransformation – 5.2.3 Hauptnormalspannungen, Spannungshauptachsen – 5.2.4 Hauptschubspannungen – 5.2.5 Kugeltensor, Spannungsdeviator – 5.2.6 Ebener Spannungszustand, Mohr'scher Spannungskreis – 5.2.7 Volumenkraft, Gleichgewichtsbedingungen	
5.3	Hooke'sches Gesetz . . . . .	75
5.4	Geometrische Größen für Stab- und Balkenquerschnitte . . . . .	76
	5.4.1 Flächenmomente 2. Grades – 5.4.2 Statische Flächenmomente – 5.4.3 Querschubzahlen – 5.4.4 Schubmittelpunkt oder Querkraftmittelpunkt – 5.4.5 Torsionsflächenmoment – 5.4.6 Wölbwiderstand	
5.5	Schnittgrößen in Stäben und Balken . . . . .	84
	5.5.1 Definition der Schnittgrößen für gerade Stäbe – 5.5.2 Berechnung von Schnittgrößen für gerade Stäbe	
5.6	Spannungen in Stäben und Balken . . . . .	87
	5.6.1 Zug und Druck – 5.6.2 Gerade Biegung – 5.6.3 Schiefe Biegung – 5.6.4 Druck und Biegung, Kern eines Querschnitts – 5.6.5 Biegung von Stäben aus Verbundwerkstoff – 5.6.6 Biegung vorgekrümmter Stäbe – 5.6.7 Reiner Schub – 5.6.8 Torsion ohne Wölbbehinderung (Saint-Venant-Torsion) – 5.6.9 Torsion mit Wölbbehinderung	
5.7	Verformungen von Stäben und Balken . . . . .	92
	5.7.1 Zug und Druck – 5.7.2 Gerade Biegung – 5.7.3 Schiefe Biegung – 5.7.4 Stab auf elastischer Bettung (Winkler-Bettung) – 5.7.5 Biegung von Stäben aus Verbundwerkstoff – 5.7.6 Querkraftbiegung – 5.7.7 Torsion ohne Wölbbehinderung (Saint-Venant-Torsion) – 5.7.8 Torsion mit Wölbbehinderung	
5.8	Energiemethoden der Elastostatik . . . . .	100
	5.8.1 Formänderungsenergie, Äußere Arbeit – 5.8.2 Prinzip der virtuellen Arbeit – 5.8.3 Arbeitsgleichung oder Verfahren mit einer Hilfskraft – 5.8.4 Sätze von Castigliano – 5.8.5 Steifigkeitsmatrix, Nachgiebigkeitsmatrix, Satz von Maxwell und Betti – 5.8.6 Statisch unbestimmte Systeme, Kraftgrößenverfahren – 5.8.7 Satz von Menabrea – 5.8.8 Verfahren von Ritz für Durchbiegungen	
5.9	Rotierende Stäbe und Ringe . . . . .	107
5.10	Flächentragwerke . . . . .	108
	5.10.1 Scheiben – 5.10.2 Platten – 5.10.3 Schalen	

5.11	Dreidimensionale Probleme	113
	5.11.1 Einzelkraft auf Halbraumoberfläche (Boussinesq-Problem) – 5.11.2 Einzelkraft im Vollraum (Kelvin-Problem) – 5.11.3 Druckbehälter. Kesselformeln – 5.11.4 Kontaktprobleme. Hertz'sche Formeln – 5.11.5 Kerbspannungen	
5.12	Stabilitätsprobleme	116
	5.12.1 Knicken von Stäben – 5.12.2 Biegedrillknicken – 5.12.3 Kippen – 5.12.4 Plattenbeulung – 5.12.5 Schalenbeulung	
5.13	Finite Elemente	121
	5.13.1 Elementmatrizen. Formfunktionen – 5.13.2 Matrizen für das Gesamtsystem – 5.13.3 Aufgabenstellungen bei Finite-Elemente-Rechnungen	
5.14	Übertragungsmatrizen	126
	5.14.1 Übertragungsmatrizen für Stabsysteme – 5.14.2 Übertragungsmatrizen für rotierende Scheiben – 5.14.3 Ergänzende Bemerkungen	
5.15	Festigkeithypothesen	131
5.16	Kerbspannungen. Kerbwirkung	132
	5.16.1 Spannungsverteilungen an Kerben – 5.16.2 Elastizitätstheoretische Lösungen grundlegender Kerbprobleme – 5.16.3 Kerbfaktoren – 5.16.4 Kerbwirkung	
<b>6</b>	<b>Plastizitätstheorie. Bruchmechanik</b>	<b>137</b>
6.1	Grundlagen der Plastizitätstheorie	137
	6.1.1 Fließkriterien – 6.1.2 Fließregeln – 6.1.3 Gleitlinien	
6.2	Elementare Theorie technischer Umformprozesse	138
	6.2.1 Schrankensatz für Umformleistung – 6.2.2 Streifen-, Scheiben- und Röhrenmodell	
6.3	Traglast	140
	6.3.1 Fließgelenke. Fließschnittgrößen – 6.3.2 Traglastsätze – 6.3.3 Traglasten für Durchlaufträger – 6.3.4 Traglasten für Rahmen	
6.4	Grundlagen der Bruchmechanik	142
	6.4.1 Spannungsverteilungen an Rissen. Spannungsintensitätsfaktoren – 6.4.2 Bruchmechanische Bewertung der Bruchgefahr – 6.4.3 Ermüdungsrisssausbreitung	
6.5	Zusammenwirken von Festigkeitsberechnung und Bruchmechanik	146

## *Strömungsmechanik*

J. Zierep, K. Bühler

<b>7</b>	<b>Einführung in die Strömungsmechanik</b>	<b>146</b>
7.1	Eigenschaften von Fluiden	146
7.2	Newton'sche und nichtnewton'sche Medien	148
7.3	Hydrostatik und Aerostatik	148
7.4	Gliederung der Darstellung: Nach Viskositäts- und Kompressibilitätseinflüssen	149
<b>8</b>	<b>Hydrodynamik: Inkompressible Strömungen mit und ohne Viskositätseinfluss</b>	<b>149</b>
8.1	Eindimensionale reibungsfreie Strömungen	149
	8.1.1 Grundbegriffe – 8.1.2 Grundgleichungen der Stromfadentheorie – 8.1.3 Anwendungsbeispiele	
8.2	Zweidimensionale reibungsfreie, inkompressible Strömungen	154
	8.2.1 Kontinuität – 8.2.2 Euler'sche Bewegungsgleichungen – 8.2.3 Stationäre ebene Potenzialströmungen – 8.2.4 Anwendungen elementarer und zusammengesetzter Potenzialströmungen – 8.2.5 Stationäre räumliche Potenzialströmungen	
8.3	Reibungsbehaftete inkompressible Strömungen	160
	8.3.1 Grundgleichungen für Masse, Impuls und Energie – 8.3.2 Kennzahlen – 8.3.3 Lösungsseigenschaften der Navier-Stokes'schen Gleichungen – 8.3.4 Spezielle Lösungen für laminare Strömungen – 8.3.5 Turbulente Strömungen – 8.3.6 Grenzschichttheorie – 8.3.7 Impulssatz – 8.3.8 Anwendungsbeispiele	
8.4	Druckverlust und Strömungswiderstand	170
	8.4.1 Durchströmungsprobleme – 8.4.2 Umströmungsprobleme	
8.5	Strömungen in rotierenden Systemen	182
<b>9</b>	<b>Gasdynamik</b>	<b>183</b>
9.1	Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie	183
9.2	Allgemeine Stoßgleichungen	184
	9.2.1 Rankine-Hugoniot-Relation – 9.2.2 Rayleigh-Gerade – 9.2.3 Schallgeschwindigkeit – 9.2.4 Senkrechter Stoß – 9.2.5 Schiefer Stoß – 9.2.6 Busemann-Polare – 9.2.7 Herzkurve	
9.3	Kräfte auf umströmte Körper	190

9.4	Stromfadentheorie . . . . .	191
	9.4.1 Lavaldüse	
9.5	Zweidimensionale Strömungen . . . . .	194
	9.5.1 Kleine Störungen, $M_\infty \lesssim 1$ – 9.5.2 Transformation auf Charakteristiken –	
	9.5.3 Prandtl-Meyer-Expansion [16, 17] – 9.5.4 Düsenströmungen –	
	9.5.5 Profilmströmungen – 9.5.6 Transsonische Strömungen	
<b>10</b>	<b>Gleichzeitiger Viskositäts- und Kompressibilitätseinfluss . . . . .</b>	<b>204</b>
10.1	Eindimensionale Rohrströmung mit Reibung . . . . .	204
10.2	Kugelumströmung, Naumann-Diagramm für $c_w$ . . . . .	206
10.3	Grundsätzliches über die laminare Plattengrenzschicht . . . . .	206
10.4	$(M, Re)$ -Ähnlichkeit in der Gasdynamik . . . . .	208
10.5	Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte aktueller Tragflügel . . . . .	209
	<b>Formelzeichen der Mechanik . . . . .</b>	<b>211</b>
	<b>Formelzeichen der Strömungsmechanik . . . . .</b>	<b>215</b>
	<b>Literatur . . . . .</b>	<b>216</b>

# Technische Mechanik

J. Wittenburg  
H.A. Richard  
J. Zierep  
K. Bühler

## MECHANIK FESTER KÖRPER

J. Wittenburg, H.A. Richard

### 1 Kinematik

Gegenstand der Kinematik ist die Beschreibung der Lagen und Bewegungen von Punkten und Körpern mit Mitteln der analytischen Geometrie. Dabei spielen weder physikalische Körpereigenschaften noch Kräfte als Ursachen von Bewegungen eine Rolle. Infolgedessen tauchen die Begriffe Schwerpunkt, Trägheitshauptachsen, Inertialsystem und absolute Bewegung nicht auf. Betrachtet werden Lagen und Bewegungen relativ zu einem beliebig bewegten kartesischen Achsensystem mit dem Ursprung 0 und mit Achseneinheitsvektoren  $e_1^0, e_2^0, e_3^0$  (genannt Basis  $\underline{e}^0$  oder Körper Null)

#### 1.1 Kinematik des Punktes

##### 1.1.1 Lage. Lagekoordinaten

Die *Lage* eines Punktes  $P$  in der Basis  $\underline{e}^0$  wird durch den *Orts-* oder *Radiusvektor*  $\mathbf{r}$  oder durch drei skalare *Lagekoordinaten* gekennzeichnet. Die am häufigsten verwendeten Lagekoordinaten sind nach Bild 1-1a *kartesische Koordinaten*  $x, y, z$ , *Zylinderkoordinaten*  $\varrho, \varphi, z$  mit  $\varrho \geq 0$  und *Kugelkoordinaten*  $r, \vartheta, \varphi$  mit  $r = |\mathbf{r}|$ . Bei Lagen in der  $(e_1^0, e_2^0)$ -Ebene sind die Zylinderkoordinaten  $z = 0$  und  $\varrho = r$ . Dann heißen  $r$  und  $\varphi$  *Polarkoordinaten* (Bild 1-1b). Bei Bewegungen des Punktes  $P$  längs einer Bahnkurve sind der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  und seine Lagekoordinaten Funktionen der Zeit. Nach Bild 1-1c wird die Lage von  $P$  auch durch die Form der Bahnkurve und durch die *Bogenlänge*  $s$  längs der Kurve von einem beliebig gewählten Punkt  $s = 0$  aus gekennzeichnet. Allen

Lagekoordinaten sind nach Bild 1-1a–c Tripel von zueinander orthogonalen Einheitsvektoren zugeordnet, und zwar  $e_1^0, e_2^0, e_3^0$  den kartesischen Koordinaten,  $e_\varrho, e_\varphi, e_z$  den Zylinderkoordinaten,  $e_r, e_\vartheta, e_\varphi$  den Kugelkoordinaten und  $e_t, e_n, e_b$  (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor der Bahnkurve) in Bild 1-1c. In der Ebene von  $e_t$  und  $e_n$  liegt der Krümmungskreis mit dem *Krümmungsradius*  $\varrho$  (nicht zu verwechseln mit der Zylinderkoordinate  $\varrho$ ). Zur Bestimmung von  $e_t, e_n, e_b$  und  $\varrho$  in jedem Punkt einer gegebenen Kurve siehe A 13.2 sowie [1]. Bei ebenen Kurven mit der Darstellung  $y = f(x)$  ist

$$\frac{1}{\varrho(x)} = \frac{d^2 f}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{df}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Umrechnung zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten (bzw. Polarkoordinaten im Fall  $z \equiv 0, r \equiv \varrho$ ):

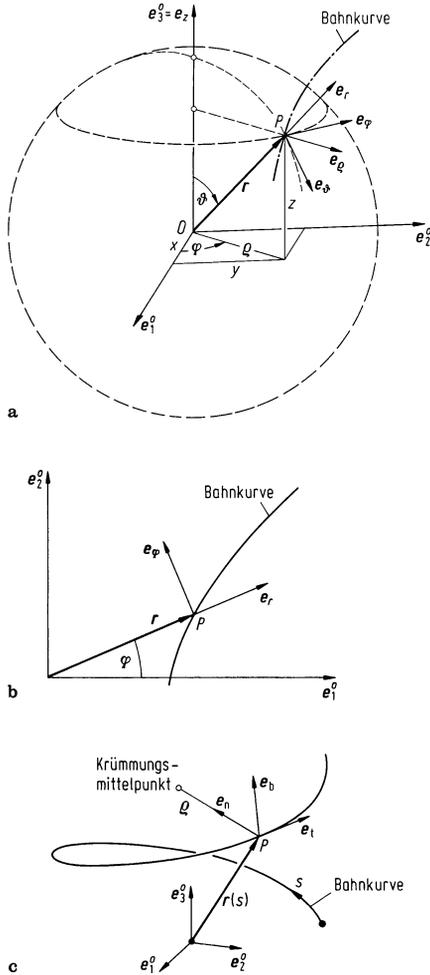
$$\left. \begin{aligned} \varrho &= (x^2 + y^2)^{1/2}, & \tan \varphi &= y/x, \\ x &= \varrho \cos \varphi, & y &= \varrho \sin \varphi, & z &\equiv z. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

Umrechnung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, & \tan \vartheta &= (x^2 + y^2)^{1/2}/z, \\ \tan \varphi &= y/x, & x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, & z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

Umrechnung zwischen Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} r &= (\varrho^2 + z^2)^{1/2}, & \tan \vartheta &= \varrho/z, & \varphi &\equiv \varphi, \\ \varrho &= r \sin \vartheta, & z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$



**Bild 1-1.** Ortsvektor  $r$  und Lagekoordinaten eines Punktes  $P$ . **a** Kartesische Koordinaten  $x, y, z$ , Zylinderkoordinaten  $\varrho, \varphi, z$  und Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  mit zugeordneten Tripeln von Einheitsvektoren. **b** Polarkoordinaten  $r, \varphi$  für ebene Bewegungen. **c** Bogenlänge  $s$  und Krümmungsradius  $\varrho$  einer Bahnkurve

**1.1.2 Geschwindigkeit. Beschleunigung**

Die *Geschwindigkeit*  $v(t)$  und die *Beschleunigung*  $a(t)$  des Punktes  $P$  relativ zu  $e^0$  sind die erste bzw. die zweite zeitliche Ableitung von  $r(t)$  in dieser Basis:

$$v(t) = \frac{dr}{dt}, \quad a(t) = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \quad (1-4)$$

Bei Vektoren kann durch die Schreibweise  $d/dt$  darauf hingewiesen werden, dass in einer bestimmten Basis  $e^i$  nach  $t$  differenziert wird. Für einen Vektor  $c$  mit beliebiger physikalischer Dimension ist der Zusammenhang zwischen den Ableitungen in zwei Basen  $e^0$  und  $e^1$

$$\frac{d^0c}{dt} = \frac{d^1c}{dt} + \omega \times c, \quad (1-5)$$

$\omega$  Winkelgeschwindigkeit von  $e^1$  relativ zu  $e^0$ .

**Komponentendarstellungen für  $v(t)$  und  $a(t)$**

Ein Punkt über einer skalaren Größe bedeutet Ableitung nach der Zeit.

Kartesische Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= \dot{x}e_1^0 + \dot{y}e_2^0 + \dot{z}e_3^0, \\ a(t) &= \ddot{x}e_1^0 + \ddot{y}e_2^0 + \ddot{z}e_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

Zylinderkoordinaten (bzw. Polarkoordinaten im Fall  $z \equiv 0, \varrho \equiv r$ ):

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= \dot{\varrho}e_\varrho + \varrho\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{z}e_z, \\ a(t) &= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)e_\varrho + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})e_\varphi + \ddot{z}e_z. \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

Kugelkoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= \dot{r}e_r + r\dot{\vartheta}e_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin\vartheta e_\varphi, \\ a(t) &= [\ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2)]e_r \\ &\quad + [r(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta) + 2\dot{r}\dot{\vartheta}]e_\vartheta \\ &\quad + [\dot{r}(\dot{\varphi} \sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos\vartheta) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\vartheta]e_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

Bogenlänge ( $\varrho$  Krümmungsradius):

$$v(t) = \dot{s}e_t, \quad a(t) = \ddot{s}e_t + (s^2/\varrho)e_n. \quad (1-9)$$

Aus (1-9) erkennt man, dass  $v$  stets tangential gerichtet ist, während  $a$  bei gekrümmten Bahnen eine Komponente normal zur Bahn, und zwar zur Innenseite der Kurve hin hat.

Zur Kinematik des Punktes mit Relativbewegung siehe 1.3.

**1.2 Kinematik des starren Körpers**

Sei  $e^1$  eine auf dem Körper feste Basis mit dem Ursprung  $A$  in einem beliebig gewählten Punkt des Körpers und mit Achseneinheitsvektoren  $e_1^1, e_2^1, e_3^1$  (Bild 1-2). Zur vollständigen Beschreibung von Lage

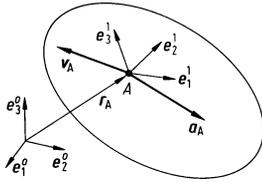


Bild 1-2. Starrer Körper mit körperfester Basis  $\underline{e}^1$  und körperfestem Punkt A

und Bewegung des Körpers relativ zu  $\underline{e}^0$  gehören drei translatorische und drei rotatorische Größen. Die translatorischen sind Lage  $\underline{r}_A(t)$ , Geschwindigkeit  $\underline{v}_A(t)$  und Beschleunigung  $\underline{a}_A(t)$  des Punktes A. Die rotatorischen sind Winkellage, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des Körpers.

1.2.1 Winkellage. Koordinatentransformation

Die Winkellage der Basis  $\underline{e}^1$  in der Basis  $\underline{e}^0$  wird durch die  $(3 \times 3)$ -Matrix  $\underline{A}$  der Richtungs-cosinus

$$A_{ij} = \cos \langle \underline{e}_i^1, \underline{e}_j^0 \rangle = \underline{e}_i^1 \cdot \underline{e}_j^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-10)$$

beschrieben. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_1^1 \\ \underline{e}_2^1 \\ \underline{e}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}_1^0 \\ \underline{e}_2^0 \\ \underline{e}_3^0 \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

oder abgekürzt  $\underline{e}^1 = \underline{A} \underline{e}^0$ .

**Eigenschaften** von  $\underline{A}$ : In Zeile  $i$  stehen die Koordinaten des Vektors  $\underline{e}_i^1$  in der Basis  $\underline{e}^0$  und in Spalte  $j$  die Koordinaten des Vektors  $\underline{e}_j^0$  in der Basis  $\underline{e}^1$ .

$$\sum_{k=1}^3 A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^3 A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$$

( $\delta_{ij}$  Kronecker-Symbol). Das sind für die neun Elemente von  $\underline{A}$  insgesamt zwölf Bindungsgleichungen, von denen sechs unabhängig sind.  $\det \underline{A} = \underline{e}_1^1 \cdot \underline{e}_2^1 \times \underline{e}_3^1 = 1$ ,  $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$ ,  $\underline{A}$  hat den Eigenwert +1.

Wenn  $\underline{v}^0 = [v_1^0 \ v_2^0 \ v_3^0]^T$  und  $\underline{v}^1 = [v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1]^T$  die Spaltenmatrizen der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{v}$  in  $\underline{e}^0$  bzw. in  $\underline{e}^1$  bezeichnen, dann gilt

$$\underline{v}^1 = \underline{A} \underline{v}^0, \quad \underline{v}^0 = \underline{A}^T \underline{v}^1. \quad (1-12)$$

Deshalb heißt  $\underline{A}$  auch *Transformationsmatrix*. Ein Körper hat zwischen 0 und 3 Freiheitsgraden der Rotation relativ zu  $\underline{e}^0$ . Von entsprechend vielen generalisierten Koordinaten der Winkellage ist  $\underline{A}$  abhängig. Drehungen um eine feste Achse und ebene Bewegungen ohne feste Achse haben einen Freiheitsgrad der Rotation. Wenn dabei z. B.  $\underline{e}_3^1$  und  $\underline{e}_3^0$  ständig parallel sind, ist mit dem Winkel  $\varphi$  in Bild 1-3

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-13)$$

Für allgemeinere Fälle werden häufig *Eulerwinkel*  $\psi, \vartheta, \varphi$ , *Kardanwinkel*  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  und *Eulerparameter*  $q_0, q_1, q_2, q_3$  verwendet.

**Eulerwinkel** (Bild 1-4a). Die zunächst mit  $\underline{e}^0$  achsenparallele Basis  $\underline{e}^1$  erreicht ihre gezeichnete Winkellage durch drei aufeinander folgende Drehungen über die Zwischenlagen  $\underline{e}^*$  und  $\underline{e}^{**}$ . Die Drehungen um die Winkel  $\psi, \vartheta$  und  $\varphi$  werden in dieser Reihenfolge um die Achsen  $\underline{e}_3^0, \underline{e}_1^*$  und  $\underline{e}_3^{**}$  ausgeführt. Mit den Abkürzungen  $s_\psi = \sin \psi, c_\psi = \cos \psi$  usw. ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\varphi - s_\psi c_\vartheta s_\varphi & s_\psi c_\varphi + c_\psi c_\vartheta s_\varphi & s_\vartheta s_\varphi \\ -c_\psi s_\varphi - s_\psi c_\vartheta c_\varphi & -s_\psi s_\varphi + c_\psi c_\vartheta c_\varphi & s_\vartheta c_\varphi \\ s_\psi s_\vartheta & -c_\psi s_\vartheta & c_\vartheta \end{bmatrix}. \quad (1-14)$$

Statt der Drehachsenfolge 3, 1, 3 sind auch die Folgen 1, 2, 1 und 2, 3, 2 möglich.

**Kardanwinkel** (Bild 1-4b). Die zunächst mit  $\underline{e}^0$  achsenparallele Basis  $\underline{e}^1$  erreicht ihre gezeichnete Winkellage durch drei aufeinander folgende Drehungen über die Zwischenlagen  $\underline{e}^*$  und  $\underline{e}^{**}$ . Die Drehungen um die Winkel  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  werden in dieser

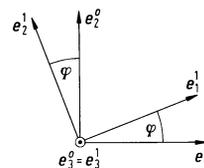
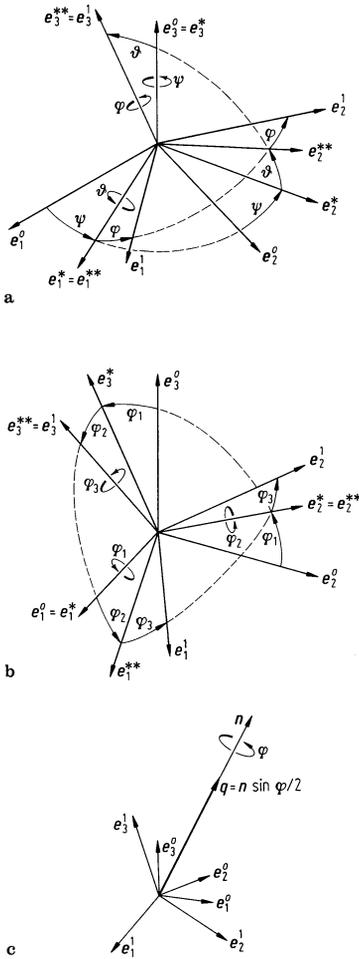


Bild 1-3. Zwei Basen  $\underline{e}^0$  und  $\underline{e}^1$  mit der Transformation (1-13)



**Bild 1-4.** Zur Definition von Eulerwinkeln (Bild a), Kardanwinkeln (Bild b) und Eulerparametern (Bild c)

Reihenfolge um die Achsen  $e_1^0, e_2^*$  und  $e_3^{**}$  ausgeführt. Mit den Abkürzungen  $s_i = \sin \varphi_i, c_i = \cos \varphi_i$  ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ -c_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 \\ s_2 & -s_1 c_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}. \quad (1-15)$$

Statt der Drehachsenfolge 1, 2, 3 sind auch die Folgen 2, 3, 1 und 3, 1, 2 möglich. Wenn alle drei Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ll 1$  sind, ist in linearer Näherung

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-16)$$

**Eulerparameter (Bild 1-4c)**

Die zunächst mit  $e^0$  achsenparallele Basis  $e^1$  erreicht ihre gezeichnete Winkellage durch eine Drehung um eine in  $e^0$  und in  $e^1$  feste Achse mit dem Einheitsvektor  $n$ . Der Drehwinkel ist  $\varphi$  im Rechtsschraubensinn um  $n$ . Man definiert

$$q_0 = \cos(\varphi/2), \quad \mathbf{q} = \mathbf{n} \sin(\varphi/2) \quad (1-17)$$

bzw.  $q_i = n_i \sin(\varphi/2) \quad (i = 1, 2, 3)$ .

$\mathbf{q}$  hat in  $e^0$  und in  $e^1$  dieselben Koordinaten.  $q_0, \dots, q_3$  sind die Eulerparameter. Sie sind durch die Bindungsgleichung

$$q_0^2 + \mathbf{q}^2 = \sum_{i=0}^3 q_i^2 = 1 \quad (1-18)$$

gekoppelt. Mit den Eulerparametern ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}. \quad (1-19)$$

$\mathbf{q}$  ist der Eigenvektor von  $\underline{A}$  zum Eigenwert +1. Umrechnung von Richtungscosinus in Eulerwinkel :

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= A_{33}, & \sin \vartheta &= (1 - \cos^2 \vartheta)^{1/2} \\ \cos \psi &= -A_{32} / \sin \vartheta, & \sin \psi &= A_{31} / \sin \vartheta, \\ \cos \varphi &= A_{23} / \sin \vartheta, & \sin \varphi &= A_{13} / \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

Umrechnung von Richtungscosinus in Kardanwinkel :

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_2 &= A_{31}, & \cos \varphi_2 &= (1 - \sin^2 \varphi_2)^{1/2}, \\ \sin \varphi_1 &= -A_{32} / \cos \varphi_2, & \cos \varphi_1 &= A_{33} / \cos \varphi_2, \\ \sin \varphi_3 &= -A_{21} / \cos \varphi_2, & \cos \varphi_3 &= A_{11} / \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

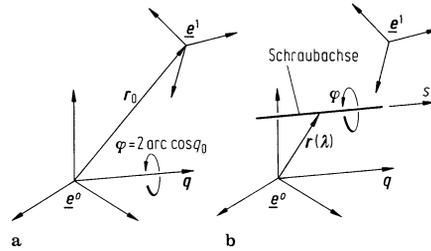
Umrechnung von Richtungscosinus in Eulerparameter:

$$q_0 = (1 + \text{sp}A)^{1/2}/2, \quad q_i = (A_{jk} - A_{kj})/(4q_0) \quad (1-22)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch}) .$

Umrechnung von Eulerwinkeln in Eulerparameter:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos(\vartheta/2) \cos[(\psi + \varphi)/2], \\ q_1 &= \sin(\vartheta/2) \cos[(\psi - \varphi)/2], \\ q_2 &= \sin(\vartheta/2) \sin[(\psi - \varphi)/2], \\ q_3 &= \cos(\vartheta/2) \sin[(\psi + \varphi)/2]. \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$



**Bild 1-5.** Die Überlagerung der Drehung  $(q_0, \mathbf{q})$  und der Translation  $\mathbf{r}_0$  in Bild **a** kann durch die Schraubung in Bild **b** mit der Schraubachse  $\mathbf{r}(\lambda)$ , (1-24), ersetzt werden

Euler- und Kardanwinkel enthalten als Sonderfälle die Drehung um eine Achse mit konstanter Richtung (zwei Winkel identisch null) und Drehungen, wie beim Kreuzgelenk, um zwei orthogonale Achsen (ein Winkel identisch null). Eulerwinkel eignen sich besonders für Präzessionsbewegungen, das sind Bewegungen mit  $\vartheta = \text{const}$ . Sie eignen sich nicht, wenn der kritische Fall  $\sin \vartheta = 0$  eintreten kann. Abhilfe: Man arbeitet alternierend mit zwei Tripeln von Eulerwinkeln mit verschiedenen Drehachsenfolgen. Für Kardanwinkel ist  $\cos \varphi_2 = 0$  der entsprechende kritische Fall. Kardanwinkel eignen sich gut für lineare Näherungen, wenn alle Winkel klein sind. Eulerparameter eignen sich besonders bei drei Freiheitsgraden der Rotation und bei Drehungen um eine feste Achse, die nicht die Richtung eines Basisvektors hat ( $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  konstant).

**Schraubung.** In Bild 1-5a ist die Lage der Basis  $\underline{\mathbf{e}}^1$  das Ergebnis einer Drehung  $(q_0, \mathbf{q})$  und einer Translation  $\mathbf{r}_0$  aus einer Anfangslage heraus, in der  $\underline{\mathbf{e}}^1$  mit  $\underline{\mathbf{e}}^0$  zusammenfiel. Den Übergang aus derselben Anfangslage in dieselbe Endlage bewirkt nach Bild 1-5b auch eine mit einem Drehschubgelenk erzeugbare *Schraubung* um eine zu  $\mathbf{q}$  parallele Schraubachse mit demselben Drehwinkel  $\varphi$  und mit der Translation  $\mathbf{s} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_0 / \sin(\varphi/2)$  in Richtung von  $\mathbf{q}$ . Die Schraubachse hat in  $\underline{\mathbf{e}}^0$  die Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(\lambda) = \lambda \mathbf{q} + \frac{q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{r}_0 - \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}_0)}{2 \sin^2(\varphi/2)}. \quad (1-24)$$

**Resultierende Drehung.** Zu zwei nacheinander ausgeführten Drehungen um feste Achsen durch einen

gemeinsamen Punkt gibt es eine *resultierende Drehung*, die den Körper aus derselben Ausgangslage in dieselbe Endlage bringt. Wenn Winkel und Drehachsen für beide Drehungen in  $\underline{\mathbf{e}}^0$  gegeben sind, die erste Drehung mit

$$(q_{01}, \mathbf{q}_1) = (\cos(\varphi_1/2), \mathbf{n}_1 \sin(\varphi_1/2))$$

und die zweite mit

$$(q_{02}, \mathbf{q}_2) = (\cos(\varphi_2/2), \mathbf{n}_2 \sin(\varphi_2/2)),$$

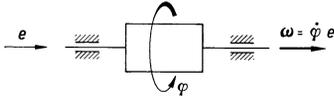
dann gilt für die resultierende Drehung

$$\left. \begin{aligned} q_{0\text{res}} &= q_{02}q_{01} - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1, \\ \mathbf{q}_{\text{res}} &= q_{02}\mathbf{q}_1 + q_{01}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-25a)$$

oder ausführlich

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi_{\text{res}}/2) &= \cos(\varphi_2/2) \cos(\varphi_1/2) \\ &\quad - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \sin(\varphi_2/2) \sin(\varphi_1/2), \\ \mathbf{n}_{\text{res}} \sin(\varphi_{\text{res}}/2) &= \mathbf{n}_1 \cos(\varphi_2/2) \sin(\varphi_1/2) \\ &\quad + \mathbf{n}_2 \cos(\varphi_1/2) \sin(\varphi_2/2) \\ &\quad + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1 \sin(\varphi_2/2) \sin(\varphi_1/2). \end{aligned} \right\} \quad (1-25b)$$

Die Schraubachse der resultierenden Drehung ist von der Reihenfolge der beiden Drehungen abhängig, der Drehwinkel nicht. Nur im Grenzfall infinitesimal kleiner Winkel gilt für Winkelvektoren  $\boldsymbol{\varphi}_1 = \varphi_1 \mathbf{n}_1$  und  $\boldsymbol{\varphi}_2 = \varphi_2 \mathbf{n}_2$  entlang den Drehachsen das Parallelogrammgesetz  $\boldsymbol{\varphi}_{\text{res}} = \boldsymbol{\varphi}_{\text{res}} \mathbf{n}_{\text{res}} = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2$ .



**Bild 1-6.** Für eine Winkelgeschwindigkeit mit konstanter Richtung gilt  $\omega = \dot{\varphi}$  und Drehzahl  $n = \omega/(2\pi)$

**1.2.2 Winkelgeschwindigkeit**

Die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega(t)$  des Körpers  $e^1$  relativ zu  $e^0$  ist ein Vektor, der an keinen Punkt gebunden ist, denn er kennzeichnet die zeitliche Änderung der Winkellage des Körpers. Bei einem einzigen Freiheitsgrad der Rotation mit einer Winkelordinate  $\varphi$  hat  $\omega$  konstante Richtung und die Größe  $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$  (Bild 1-6). Bei zwei und drei Freiheitsgraden ist  $\omega$  nicht Ableitung einer anderen Größe. Seien  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die Koordinaten von  $\omega$  bei Zerlegung in der körperfesten Basis  $e^1$ . Zwischen ihnen und generalisierten Koordinaten der Winkellage bestehen die folgenden Beziehungen. Für Richtungscosinus in beliebiger Darstellung:

$$\underline{\tilde{\omega}} = \underline{\dot{A}} \underline{A}^T, \quad \underline{\dot{A}} = -\underline{\tilde{\omega}} \underline{A} \tag{1-26}$$

mit der Matrix  $\underline{\tilde{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Für Eulerwinkel:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\theta s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ s_\theta c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ c_\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \tag{1-27a}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\varphi/s_\theta & c_\varphi/s_\theta & 0 \\ c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi c_\theta/s_\theta & -c_\varphi c_\theta/s_\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \tag{1-27b}$$

Für Kardanwinkel:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}, \tag{1-28a}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3/c_2 & -s_3/c_2 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ -c_3 s_2/c_2 & s_3 s_2/c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \tag{1-28b}$$

Im Fall sehr kleiner Winkel gilt die Näherung  $\dot{\varphi}_i \approx \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Für Eulerparameter:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \tag{1-29a}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \tag{1-29b}$$

Die jeweils zweite der Glen. (1-26) bis (1-29) stellt *kinematische Differenzialgleichungen* zur Berechnung der Winkellage aus vorher berechneten Funktionen  $\omega_i(t)$  dar. Wenn die numerische Integration bei Eulerparametern Größen  $q_i(t)$  liefert, die die Bindungsgleichung (1-18) nicht streng erfüllen, dann ersetze man die  $q_i(t)$  durch die renormierten Größen

$$q_i^*(t) = q_i(t) \left[ \sum_{j=0}^3 q_j^2(t) \right]^{-1/2} \quad (i = 0, \dots, 3).$$

**Geschwindigkeitsverteilung im starren Körper.**

$\omega$  und die Geschwindigkeit  $v_A$  eines körperfesten Punktes  $A$  bestimmen die Geschwindigkeit  $v_P$  jedes anderen körperfesten Punktes  $P$  am Radiusvektor  $\overrightarrow{AP} = \underline{\rho}$ :

$$v_P = v_A + \omega \times \underline{\rho}. \tag{1-30}$$

**Ebene Bewegung, Polbahnen, Geschwindigkeitsplan.**

Bei der ebenen Bewegung eines Körpers hat  $\omega(t)$  konstante Richtung, und alle Körperpunkte bewegen sich in parallelen Ebenen. Nur eine Bewegungsebene wird betrachtet. In ihr hat der Körper in jedem Zeitpunkt dieselbe Geschwindigkeitsverteilung, wie bei einer Drehung um einen festen Punkt,  $v = \omega \times r$  (Bild 1-7). Dieser Punkt heißt *Momentanpol der Geschwindigkeit*, Geschwindigkeitspol, Drehpol oder Pol. Er liegt im Schnittpunkt aller Geschwindigkeitslote. Zwei Lote genügen zur Bestimmung. Im Sonderfall der reinen Translation liegt der Pol im Unendlichen und im Sonderfall der Drehung um eine feste Achse permanent auf der Achse.

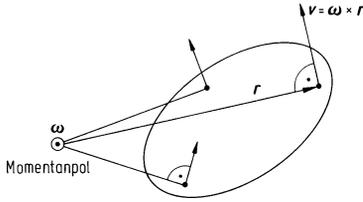


Bild 1-7. Die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte bestimmen den Momentanpol

Im Allgemeinen liegt er zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten. Seine Bahn in  $e^0$  heißt *Rastpolbahn* und seine Bahn in  $e^1$  *Gangpolbahn*. Die Bewegung des Körpers kann man durch Abrollen der Gangpolbahn auf der Rastpolbahn erzeugen.

**Beispiel 1-1:** In Bild 1-8a bewegt sich ein Stab der Länge  $l$  mit seinen Enden auf Führungseraden. Der Pol  $P$  hat von  $M$  und von der Stabmitte die konstanten Entfernungen  $l$  bzw.  $l/2$ . Also sind die Polbahnen die gezeichneten Kreise. Die Bewegung wird konstruktiv eleganter erzeugt, indem man den kleinen Kreis mit dem auf ihm festen Stab als Planetenrad im großen Kreis abrollt. Da sich jeder Punkt am Umfang des kleinen Rades auf einer Geraden durch  $M$  bewegt, können zwei Räder mit dem Radienverhältnis 2:1 auch die Bewegung einer Stange auf zwei Führungen unter einem beliebigen Winkel  $\alpha$  erzeugen (Bild 1-8b). Der Radius des kleinen Rades ist  $l/(2 \sin \alpha)$ .

Wenn sich mehrere Körper relativ zu  $e^0$  in derselben Ebene bewegen, dann hat jeder Körper  $i$  relativ zu jedem anderen Körper  $j$  einen Pol  $P_{ij}$  (gleich  $P_{ji}$ ) der Relativbewegung und eine relative Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{ij}$ . Es gilt der Satz von

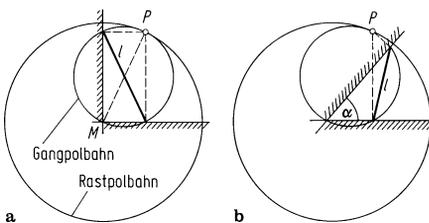


Bild 1-8. Polbahnen eines auf zwei Geraden geführten Stabes

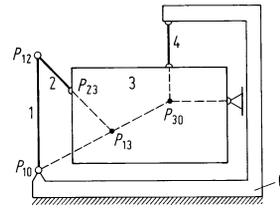


Bild 1-9. Zur Konstruktion des Pols  $P_{13}$

**Kennedy und Aronhold:** Die Pole  $P_{ij}$ ,  $P_{jk}$  und  $P_{ki}$  dreier Körper  $i, j$  und  $k$  liegen auf einer Geraden. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Körper  $i$  und  $j$  relativ zu Körper  $k$  ist (plus bei gleicher Richtung der Vektoren, minus andernfalls)

$$\frac{\omega_{ik}}{\omega_{jk}} = \pm \frac{|P_{jk}P_{ij}|}{|P_{ik}P_{ij}|}$$

**Beispiel 1-2:** Im Mechanismus von Bild 1-9 sind die Pole  $P_{10}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  und  $P_{30}$  ohne den Satz von Kennedy und Aronhold konstruierbar. Nach dem Satz liegt  $P_{13}$  im Schnittpunkt von  $\overline{P_{10}P_{30}}$  und  $\overline{P_{12}P_{23}}$ .

Bei ebenen Getrieben genügt die Kenntnis der Pole zur Angabe aller Geschwindigkeitsverhältnisse.

**Beispiel 1-3; Gliedergetriebe:** In Bild 1-10 sei  $v_{rel}$  die Geschwindigkeit des Kolbens 2 relativ zum Zylinder 1. Sie ist zugleich die Geschwindigkeit relativ

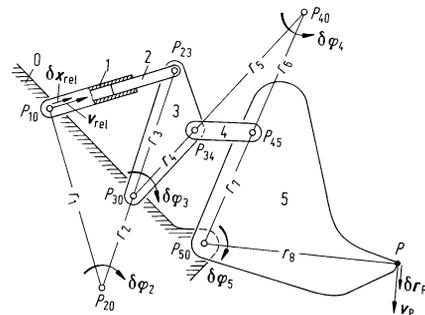
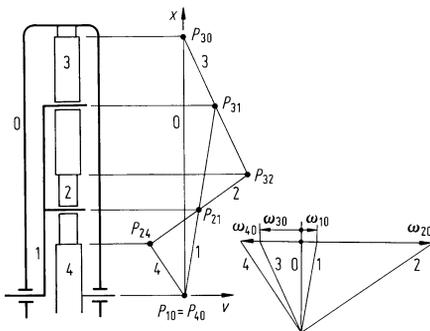


Bild 1-10. Polplan für einen Baggerschaufelmechanismus. Jeder Gelenkpunkt ist auf zwei Körpern fest und bewegt sich momentan auf Kreisen um die Pole beider Körper. Daraus ergibt sich  $v_P : v_{rel} = (r_2 r_4 r_6 r_8) / (r_1 r_3 r_5 r_7)$  mit  $r_2 = P_{20}P_{23}$  und  $r_3 = P_{30}P_{23}$ . Zu den virtuellen Verschiebungen siehe 1.5

zu Körper 0 desjenigen Punktes von 2, der mit  $P_{10}$  zusammenfällt. Damit ergibt sich  $P_{20}$ . Mit den gezeichneten Polen und mit den Radien  $r_1, \dots, r_8$  erhält man für die Größe der Geschwindigkeit  $v_p$  den angegebenen Ausdruck.

**Beispiel 1-4; Planetengetriebe** (in Bild 1-11 links): Nach rechts herausgezogene Parallelen geben die Lage von Polen  $P_{ij}$  an. Im  $x, v$ -Diagramm in Bildmitte gibt die Gerade  $i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) an, wie im Körper  $i$  die Geschwindigkeit  $v$  relativ zu Körper 0 vom Ort  $x$  abhängt. Je zwei Geraden  $i$  und  $j$  schneiden sich auf der Höhe von  $P_{ij}$  ( $i, j = 0, \dots, 4$ ). Die Steigung der Geraden  $i$  ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{i0}$  von Körper  $i$  relativ zu Körper 0. Für eine einzige Gerade wird die Steigung willkürlich vorgegeben (z.B. für Gerade 1 mit  $v = 0$  in der Höhe von  $P_{10}$ ). Alle anderen Geraden sind danach festgelegt. Im *Winkelgeschwindigkeitsplan* rechts im Bild sind Parallelen zu allen Geraden von einem Punkt aus angetragen. Die Abschnitte auf der Geraden senkrecht zur Geraden 0 sind proportional zu den Steigungen, d.h. zu den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{i0}$ . Als Differenzen sind auch alle relativen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{ij} = \omega_{i0} - \omega_{j0}$  ablesbar. Mehr über Geschwindigkeitspläne ebener Getriebe in [2].

**Räumliche Drehung um einen festen Punkt. Winkelgeschwindigkeitsplan.** Der nach Größe und Richtung veränderliche Vektor  $\omega(t)$  des Körpers 1 erzeugt, wenn man ihn vom festen Punkt 0 aus anträgt, so-



**Bild 1-11.** Bauplan eines Planetenradgetriebes (links) mit Geschwindigkeitsplan (Mitte) und Winkelgeschwindigkeitsplan (rechts) für stehendes Gehäuse 0

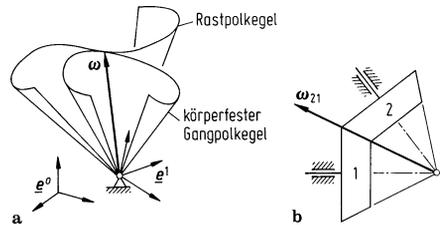
wohl in  $e^0$  als auch in  $e^1$  eine allgemeine Kegelfläche (Bild 1-12a). Die Kegel heißen Rastpolkegel bzw. Gangpolkegel. Die Bewegung des Körpers kann man dadurch erzeugen, dass man den Gangpolkegel auf dem Rastpolkegel abrollt.

**Beispiel 1-5:** Das Kegelrad 2 in Bild 1-12b ist sein eigener Gangpolkegel für die Drehung relativ zu Rad 1, und Rad 1 ist der Rastpolkegel.

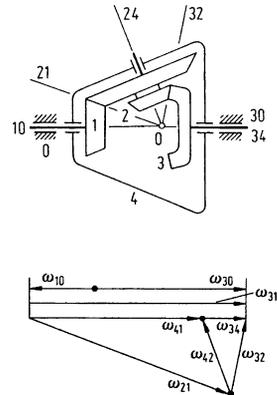
In Kegelradgetrieben mit mehreren Körpern  $i = 0, \dots, n$  bewegt sich jeder Körper relativ zu jedem anderen um einen allen gemeinsamen Punkt 0 (Bild 1-13). Sei  $\omega_{ij}$  die Winkelgeschwindigkeit von Körper  $i$  relativ zu Körper  $j$  ( $i, j = 0, \dots, n$ ), sodass gilt

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij}, \quad \omega_{ik} - \omega_{jk} = \omega_{ij} \quad (1-31)$$

$$(i, j, k = 0, \dots, n).$$



**Bild 1-12.** a Rastpolkegel und Gangpolkegel einer allgemeinen Starrkörperbewegung um einen festen Punkt. b Für die Bewegung des Kegelrades 2 relativ zu Rad 1 sind Rast- und Gangpolkegel mit den Wälzkegeln 1 bzw. 2 identisch



**Bild 1-13.** Bauplan und Winkelgeschwindigkeitsplan eines Differentialgetriebes.  $\omega_{10}$  und  $\omega_{30}$  sind frei wählbar

Bei einem vorgegebenen Getriebe mit  $f$  Freiheitsgraden können die Größen von  $f$  relativen Winkelgeschwindigkeiten vorgegeben werden. Dann sind die Größen aller anderen und alle Winkelgeschwindigkeitsrichtungen durch die Richtungen der Radachsen und der Kegelberührungslinien sowie durch (1-31) festgelegt.

**Beispiel 1-6:** Das Differenzialgetriebe in Bild 1-13 hat Körper  $0, \dots, 4$  und  $f = 2$  Freiheitsgrade. Im Bauplan oben geben Geraden mit Indizes  $ij$  die Richtungen von relativen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{ij}$  an. Darunter der Winkelgeschwindigkeitsplan.

### 1.2.3 Winkelbeschleunigung

Die *Winkelbeschleunigung* des Körpers  $\underline{e}^1$  relativ zu  $\underline{e}^0$  ist die zeitliche Ableitung von  $\omega$  in der Basis  $\underline{e}^0$ . Sie ist wegen (1-5) auch gleich der Ableitung in  $\underline{e}^1$ . Wenn es keine Verwechslung geben kann, schreibt man  $\dot{\omega}$ . Aus (1-27) und (1-28) ergeben sich die Darstellungen für Eulerwinkel

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_\vartheta s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ s_\vartheta c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ c_\vartheta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} c_\vartheta s_\varphi \dot{\psi} \dot{\theta} - s_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + s_\vartheta c_\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi} \\ c_\vartheta c_\varphi \dot{\psi} \dot{\theta} - c_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - s_\vartheta s_\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi} \\ -s_\vartheta \dot{\psi} \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-32)$$

und für Kardanwinkel

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -s_2 c_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + c_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - c_2 s_3 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 \\ s_2 s_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - s_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - c_2 c_3 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 \\ c_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1-33)$$

### Beschleunigungsverteilung im starren Körper.

$\omega, \dot{\omega}$  und die Beschleunigung  $a_A$  des Punktes  $A$  bestimmen zusammen die Beschleunigung  $a_P$  jedes anderen körperfesten Punktes  $P$  am Radiusvektor  $\overrightarrow{AP} = \varrho$ :

$$\begin{aligned} a_P &= a_A + \dot{\omega} \times \varrho + \omega \times (\omega \times \varrho) \\ &= a_A + \dot{\omega} \times \varrho + (\omega \cdot \varrho)\omega - \omega^2 \varrho. \end{aligned} \quad (1-34)$$

### 1.3 Kinematik des Punktes mit Relativbewegung

In Bild 1-14 bewegt sich Körper 1 mit der auf ihm festen Basis  $\underline{e}^1$  relativ zu  $\underline{e}^0$ , und der Punkt  $P$  bewegt sich relativ zu  $\underline{e}^1$ . Der Bewegungszustand von Körper 1 relativ zu  $\underline{e}^0$  wird nach 1.2 durch die sechs Größen  $r_A, v_A, a_A, \underline{A}, \omega$  und  $\dot{\omega}$  beschrieben. Wenn diese Bewegung  $f_1 \leq 6$  Freiheitsgrade hat, dann können die sechs Größen als Funktionen von  $f_1$  generalisierten Koordinaten  $q_i$  ( $i = 1, \dots, f_1$ ) und von deren Ableitungen dargestellt werden (siehe 1.1 und 1.2). Der Bewegungszustand von Punkt  $P$  relativ zu  $\underline{e}^1$  wird durch den Ortsvektor  $\varrho$ , die Relativgeschwindigkeit  $v_{rel}$  und die Relativbeschleunigung  $a_{rel}$  beschrieben. Wenn diese Relativbewegung  $f_2 \leq 3$  Freiheitsgrade hat, dann können die drei Größen als Funktionen von  $f_2$  generalisierten Koordinaten  $q_i$  ( $i = f_1 + 1, \dots, f_1 + f_2$ ) und von deren Ableitungen dargestellt werden. Der Ortsvektor  $r_P$ , die Geschwindigkeit  $v_P$  und die Beschleunigung  $a_P$  von  $P$  relativ zu  $\underline{e}^0$  sind die Größen (siehe (1-30) und (1-34) sowie (1-5))

$$r_P = r_A + \varrho, \quad v_P = v_A + \omega \times \varrho + v_{rel}, \quad (1-35a)$$

$$\begin{aligned} a_P &= a_A + \dot{\omega} \times \varrho + \omega \times (\omega \times \varrho) \\ &+ 2\omega \times v_{rel} + a_{rel}. \end{aligned} \quad (1-35b)$$

Darin sind  $v_A + \omega \times \varrho = v_{kP}$  und  $a_A + \dot{\omega} \times \varrho + \omega \times (\omega \times \varrho) = a_{kP}$  die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung des mit  $P$  zusammenfallenden körperfesten Punktes;  $2\omega \times v_{rel}$  heißt *Coriolisbeschleunigung*. Welche Größen in (1-35a) und (1-35b) gegeben und welche unbekannt sind, hängt von der Problemstellung ab. Durch Zerlegung aller Vektoren in einer gemeinsamen Basis (z. B. in  $\underline{e}^1$ ) werden skalare Gleichungen gebildet.

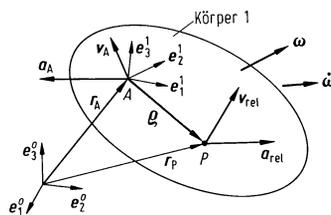


Bild 1-14. Darstellung aller Größen von (1-35)

### 1.4 Freiheitsgrade der Bewegung. Kinematische Bindungen

Die Anzahl  $f$  der *Freiheitsgrade* der Bewegung eines mechanischen Systems ist gleich der Anzahl unabhängiger generalisierter Lagekoordinaten  $q_1, \dots, q_f$ , die zur eindeutigen Beschreibung der Lage des Systems nötig sind. Verwendet man  $n > f$  Lagekoordinaten  $q_1, \dots, q_n$ , dann wird die Abhängigkeit von  $\nu = n - f$  überzähligen Koordinaten durch  $\nu$  voneinander unabhängige, sog. *holonome Bindungsgleichungen*

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu) \quad (1-36)$$

ausgedrückt. Die Bindungen und das mechanische System heißen *holonom-skleronom*, wenn die Zeit  $t$  nicht explizit erscheint, sonst – bei Vorgabe von Systemparametern als Funktionen der Zeit – *holonom-rheonom*. Totale Differenziation von (1-36) nach  $t$  liefert lineare Bindungsgleichungen für generalisierte Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  und Beschleunigungen  $\ddot{q}_i$ . Mit  $J_{ij} = \partial f_i / \partial q_j$  lauten sie

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n J_{ij} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n J_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial J_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial J_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_j} \right] \dot{q}_j \\ + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} &= 0 \quad (i = 1, \dots, \nu). \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

Für virtuelle Änderungen  $\delta q_j$  der Koordinaten gilt im skleronomen wie im rheonomen Fall

$$\sum_{j=1}^n J_{ij} \delta q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu). \quad (1-38)$$

**Beispiel 1-7:** Ein ebenes Punktpendel der vorgegebenen veränderlichen Länge  $l(t)$  hat einen Freiheitsgrad. Die kartesischen Koordinaten  $x, y$  des Punktkörpers unterliegen der holonom-rheonomen Bindungsgleichung  $x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$ . Daraus folgen für (1-37) und (1-38)

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} - \dot{l} &= 0, \\ x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \ddot{l} - \dot{l}^2 &= 0, \\ x\delta x + y\delta y &= 0. \end{aligned}$$

Ein mechanisches System heißt *nichtholonom*, wenn seine generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  Bindungsgleichungen unterliegen, die sich nicht durch Integration in die Form (1-36) überführen lassen. Nichtholonome Bindungen haben keinen Einfluss auf die Anzahl  $f$  der unabhängigen Lagekoordinaten, d. h. der Freiheitsgrade. Sie stellen aber Bindungen zwischen den virtuellen Verschiebungen  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$  her, sodass im unendlich Kleinen die Anzahl der Freiheitsgrade mit jeder unabhängigen nichtholonomen Bindung um Eins abnimmt. Mechanisch verursachte nichtholonome Bindungsgleichungen sind linear in  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ , also von der Form

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + a_{i0} = 0 \quad (i = 1, \dots, \nu). \quad (1-39)$$

Die  $a_{ij}$  ( $j = 0, \dots, n$ ) sind Funktionen von  $q_1, \dots, q_n$  im skleronomen Fall und von  $q_1, \dots, q_n$  und  $t$  im rheonomen Fall. Differenziation nach  $t$  liefert für Beschleunigungen und für virtuelle Verschiebungen Bindungsgleichungen, die mit (1-37) bzw. (1-38) identisch sind, wenn man  $J_{ij}$  durch  $a_{ij}$  und  $\partial f_i / \partial t$  durch  $a_{i0}$  ersetzt.

**Beispiel 1-8:** Der vertikal stehende Schlittschuh in Bild 1-15 mit punktueller Berührung der gekrümmten Kufe hat drei unabhängige Lagekoordinaten  $x, y$  und  $\varphi$ . Die nichtholonome Bindung „die Geschwindigkeit hat die Richtung der Kufe“ wird durch  $\dot{y} - \dot{x} \tan \varphi = 0$  ausgedrückt. Daraus folgt  $\delta y - \delta x \tan \varphi = 0, \ddot{y} - \ddot{x} \tan \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} / \cos^2 \varphi = 0$ .

### 1.5 Virtuelle Verschiebungen

*Virtuelle Verschiebungen* eines Systems sind infinitesimal kleine, mit allen Bindungen des Systems verträgliche, im Übrigen aber beliebige Verschiebungen.

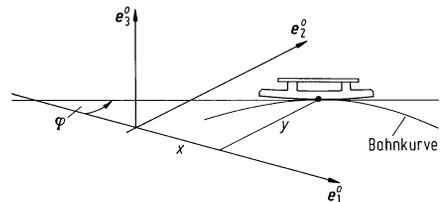


Bild 1-15. Nichtholonomes System

Die virtuelle Verschiebung eines Systempunktes mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  wird mit  $\delta\mathbf{r}$  bezeichnet. Die virtuelle Verschiebung eines starren Körpers setzt sich aus der virtuellen Verschiebung  $\delta\mathbf{r}_A$  eines beliebigen Körperpunktes  $A$  und aus einer *virtuellen Drehung* des Körpers um  $A$  zusammen. Für diese wird der Drehvektor  $\delta\boldsymbol{\pi}$  mit dem Betrag des infinitesimal kleinen Drehwinkels und mit der Richtung der Drehachse eingeführt. Dann ist die virtuelle Verschiebung eines anderen Körperpunktes  $P$

$$\delta\mathbf{r}_P = \delta\mathbf{r}_A + \delta\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\rho} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{AP}. \quad (1-40)$$

In einem System mit  $f$  Freiheitsgraden und mit  $f + \nu$  Lagekoordinaten  $q_1, \dots, q_{f+\nu}$  ist der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  jedes Punktes eine bekannte Funktion  $\mathbf{r}(q_1, \dots, q_{f+\nu})$ . Virtuelle Änderungen  $\delta q_i$  der Koordinaten  $q_i$  verursachen eine virtuelle Verschiebung  $\delta\mathbf{r}$ . In ihr treten dieselben Koeffizienten auf, wie im Ausdruck für die Geschwindigkeit des Punktes:

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{f+\nu} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{f+\nu} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (1-41)$$

**Beispiel 1-9:** In Bild 1-10 sei  $\delta x_{\text{rel}}$  die virtuelle Verschiebung des Kolbens 2 relativ zum Zylinder 1 und  $\delta\mathbf{r}_P$  die virtuelle Verschiebung des Punktes  $P$ . Nach (1-41) ist

$$\delta\mathbf{r}_P : \delta x_{\text{rel}} = v_P : v_{\text{rel}} = (r_2 r_4 r_6 r_8) / (r_1 r_3 r_5 r_7).$$

Analog zu (1-41) gilt: Im Drehvektor  $\delta\boldsymbol{\pi}$  eines starren Körpers treten dieselben Koeffizienten auf, wie in der Winkelgeschwindigkeit des Körpers:

$$\delta\boldsymbol{\pi} = \sum_{i=1}^{f+\nu} \mathbf{p}_i \delta q_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{f+\nu} \mathbf{p}_i \dot{q}_i. \quad (1-42)$$

**Beispiel 1-10:** Virtuelle Änderungen  $\delta\psi$ ,  $\delta\theta$  und  $\delta\varphi$  der Eulerwinkel eines Körpers verursachen nach (1-27a) einen Drehvektor  $\delta\boldsymbol{\pi}$ , der in der körperfesten Basis die Komponenten hat:

$$\begin{aligned} &(\sin \vartheta \sin \varphi \delta\psi + \cos \varphi \delta\theta, \\ &\sin \vartheta \cos \varphi \delta\psi - \sin \varphi \delta\theta, \cos \vartheta \delta\psi + \delta\varphi). \end{aligned}$$

Virtuelle Verschiebungen von Körpern in ebener Bewegung sind am einfachsten beschreibbar als virtuelle Drehungen der Körper um ihre Momentanpole.

**Beispiel 1-11:** In Bild 1-10 gilt für die virtuellen Drehwinkel der Körper  $\delta\varphi_5 : \delta\varphi_4 = r_6 : r_7$ ,  $\delta\varphi_4 : \delta\varphi_3 = r_4 : r_5$ ,  $\delta\varphi_3 : \delta\varphi_2 = r_2 : r_3$ .

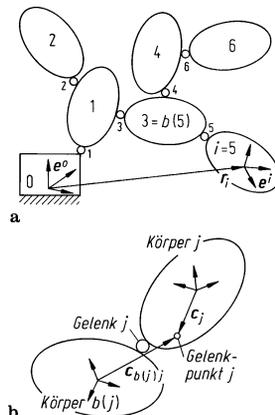
Im Fall rheonomer (d. h. zeitabhängiger) Bindungen müssen virtuelle Verschiebungen bei  $t = \text{const}$  gebildet werden.

**Beispiel 1-12:** Wenn die Koordinate  $q_k$  eines Systems eine vorgeschriebene Funktion  $q_k(t)$  der Zeit ist, muss in (1-41) und (1-42)  $\delta q_k = 0$  gesetzt werden.

### 1.6 Kinematik offener Gliederketten

Bild 1-16a ist ein Beispiel für eine beliebig verzweigte ebene oder räumliche, offene Gliederkette mit Körpern  $i = 1, \dots, n$  und Gelenken  $j = 1, \dots, n$  auf einem ruhenden Trägerkörper 0. Die angedeuteten Gelenke dürfen bis zu sechs Freiheitsgrade haben. Die Körper und Gelenke sind regulär nummeriert (entlang jedem von Körper 0 ausgehenden Zweig monoton steigend; jedes Gelenk hat denselben Index, wie der nach außen folgende Körper). Sei  $b(i)$  für  $i = 1, \dots, n$  der Index des inneren Nachbarkörpers von Körper  $i$  (Beispiel: In Bild 1-16a ist  $b(5) = 3$ ,  $b(1) = 0$ ).

Auf jedem Körper  $i = 0, \dots, n$  wird eine Basis  $\mathbf{e}^i$  beliebig festgelegt. Für Gelenk  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) wird auf Körper  $j$  ein Gelenkpunkt durch einen Vektor  $\mathbf{c}_j$



**Bild 1-16.** a Offene Gliederkette mit regulär nummerierten Körpern und Gelenken. Körper 0 ist in Ruhe. Das Symbol o kennzeichnet beliebige Gelenke mit 1 bis 6 Freiheitsgraden. b Kinematische Größen für das Gelenk  $j$  zwischen den Körpern  $j$  und  $b(j)$

definiert (Bild 1-16b). In der Basis  $\underline{e}^{b(j)}$  hat dieser Gelenkpunkt den i. Allg. nicht konstanten Ortsvektor  $\underline{c}_{b(j)}$ . Der Vektor ist nach 1.2 eine von sechs Größen zur Beschreibung der Lage und Bewegung von Körper  $j$  relativ zu Körper  $b(j)$ . Die anderen sind die Geschwindigkeit  $\underline{v}_j$  und die Beschleunigung  $\underline{a}_j$  des Gelenkpunkts relativ zu Körper  $b(j)$ , die Transformationsmatrix  $\underline{G}^j$  (definiert durch  $\underline{e}^j = \underline{G}^j \underline{e}^{b(j)}$ ) sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\Omega}_j$  und die Winkelbeschleunigung  $\underline{\varepsilon}_j$  von Körper  $j$  relativ zu Körper  $b(j)$ . Die sechs Größen werden durch generalisierte Gelenkkoordinaten ausgedrückt. Im Gelenk  $j$  werden bei  $1 \leq f_j \leq 6$  Freiheitsgraden ebenso viele Gelenkkoordinaten geeignet gewählt. Das Gesamtsystem hat  $f = \sum_{j=1}^n f_j$  Freiheitsgrade. Seine  $f$  Koordinaten bilden nach Gelenken geordnet die Spaltenmatrix  $\underline{q} = [q_1, \dots, q_f]^T$ . Die sechs Gelenkgrößen sind bekannte Funktionen der Form

$$\left. \begin{aligned} \underline{c}_{b(j)}(\underline{q}), \quad \underline{v}_j &= \sum_{l=1}^{f_j} \underline{k}_{jl} \dot{q}_l, \quad \underline{a}_j = \sum_{l=1}^{f_j} \underline{k}_{jl} \ddot{q}_l + \underline{s}_j, \\ \underline{G}^j(\underline{q}), \quad \underline{\Omega}_j &= \sum_{l=1}^{f_j} \underline{p}_{jl} \dot{q}_l, \quad \underline{\varepsilon}_j = \sum_{l=1}^{f_j} \underline{p}_{jl} \ddot{q}_l + \underline{w}_j \\ (j = 1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

wobei nur die  $f_j$  Koordinaten des jeweiligen Gelenks  $j$  explizit auftreten.

**Beispiel 1-13:** Bei einem Drehschubgelenk werden als Gelenkkoordinaten eine kartesische Koordinate  $x$  der Translation entlang der Achse und ein Drehwinkel  $\varphi$  um die Achse gewählt. Als Gelenkpunkt wird ein Punkt auf der Achse gewählt. Dann ist  $\underline{v}_j = \dot{x}\underline{e}$ ,  $\underline{a}_j = \ddot{x}\underline{e}$ ,  $\underline{\Omega}_j = \dot{\varphi}\underline{e}$ ,  $\underline{\varepsilon}_j = \ddot{\varphi}\underline{e}$  mit dem Achseneinheitsvektor  $\underline{e}$ . Durch die definierten Gelenkgrößen werden die Lagen und Bewegungen aller Körper  $i = 1, \dots, n$  relativ zu Körper 0 ausgedrückt, genauer gesagt, der Ortsvektor  $\underline{r}_i$ , die Geschwindigkeit  $\underline{\dot{r}}_i$  und die Beschleunigung  $\underline{\ddot{r}}_i$  des Ursprungs von  $\underline{e}^i$ , die Transformationsmatrix  $\underline{A}^i$  (definiert durch  $\underline{e}^i = \underline{A}^i \underline{e}^0$ ), die Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_i$  und die Winkelbeschleunigung  $\underline{\omega}_i$  (Bild 1-16). Für einen festen Wert von  $i$  sind alle sechs Größen außer  $\underline{A}^i$  Summen von Gelenkgrößen über alle Gelenke zwischen Körper 0 und Körper  $i$ . Die Matrizen  $\underline{A}^i$  sind entsprechende Produkte. Sei  $T_{ji} = -1$ , wenn

Gelenk  $j$  zwischen Körper 0 und Körper  $i$  liegt und  $T_{ji} = 0$  andernfalls ( $j, i = 1, \dots, n$ ). Die folgenden Summen erstrecken sich über  $j = 1, \dots, n$ , und überall ist  $b = b(j)$ .

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_i &= -\sum T_{ji}(\underline{c}_{bj} - \underline{c}_j), \\ \underline{\dot{r}}_i &= -\sum T_{ji}(\underline{v}_j + \underline{\omega}_b \times \underline{c}_{bj} - \underline{\omega}_j \times \underline{c}_j), \\ \underline{\ddot{r}}_i &= -\sum T_{ji}[\underline{a}_j + \underline{\dot{\omega}}_b \times \underline{c}_{bj} - \underline{\dot{\omega}}_j \times \underline{c}_j + \underline{\omega}_b \\ &\quad \times (\underline{\omega}_b \times \underline{c}_{bj}) - \underline{\omega}_j \times (\underline{\omega}_j \times \underline{c}_j) + 2\underline{\omega}_b \times \underline{v}_j], \\ \underline{\omega}_i &= -\sum T_{ji} \underline{\Omega}_j, \\ \underline{\dot{\omega}}_i &= -\sum T_{ji}(\underline{\varepsilon}_j + \underline{\omega}_b \times \underline{\Omega}_j), \\ \underline{A}^i &= \prod_{j:T_{ji} \neq 0} \underline{G}^j \quad (\text{Indizes } j \text{ monoton fallend}) \\ &\quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

Diese Gleichungen werden in der Reihenfolge  $i = 1, \dots, n$  rekursiv ausgewertet. Mit (1-43) ist wie folgt eine Darstellung durch Gelenkkoordinaten möglich. Man definiert die Spaltenmatrizen  $\underline{v} = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]^T$ ,  $\underline{a} = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]^T$ ,  $\underline{\Omega} = [\underline{\Omega}_1 \dots \underline{\Omega}_n]^T$  und  $\underline{\varepsilon} = [\underline{\varepsilon}_1 \dots \underline{\varepsilon}_n]^T$ . Damit werden die je  $n$  Gleichungen (1-43) für  $\underline{v}_j$ ,  $\underline{a}_j$ ,  $\underline{\Omega}_j$  und  $\underline{\varepsilon}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) zusammengefasst zu

$$\left. \begin{aligned} \underline{v} &= \underline{k}^T \underline{\dot{q}}, \quad \underline{a} = \underline{k}^T \underline{\ddot{q}} + \underline{s}, \\ \underline{\Omega} &= \underline{p}^T \underline{\dot{q}}, \quad \underline{\varepsilon} = \underline{p}^T \underline{\ddot{q}} + \underline{w} \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

mit hierdurch definierten Matrizen  $\underline{k}$ ,  $\underline{p}$ ,  $\underline{s}$  und  $\underline{w}$ . Seien weiterhin

$$\underline{r} = [\underline{r}_1 \dots \underline{r}_n]^T \quad \text{und} \quad \underline{\omega} = [\underline{\omega}_1 \dots \underline{\omega}_n]^T.$$

Dann liefert (1-44)

$$\left. \begin{aligned} \underline{\dot{r}} &= \underline{a}_1 \underline{\dot{q}}, \quad \underline{\ddot{r}} = \underline{a}_1 \underline{\ddot{q}} + \underline{b}_1, \\ \underline{\omega} &= \underline{a}_2 \underline{\dot{q}}, \quad \underline{\dot{\omega}} = \underline{a}_2 \underline{\ddot{q}} + \underline{b}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-46)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \underline{a}_1 &= (\underline{C}T)^T \times \underline{a}_2 - (\underline{k}T)^T, \quad \underline{a}_2 = -(\underline{p}T)^T, \\ \underline{b}_1 &= (\underline{C}T)^T \times \underline{b}_2 - T^T \underline{s}^*, \quad \underline{b}_2 = -T^T \underline{w}^*. \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

Darin sind  $T$  die Matrix aller  $T_{ji}$  ( $j, i = 1, \dots, n$ ) und  $C$  die Matrix mit den Elementen  $C_{ij} = \underline{c}_{b(j)}$  für  $i = b(j)$ ,  $C_{ij} = -\underline{c}_j$  für  $i = j$  und  $C_{ij} = \underline{0}$  sonst ( $i, j = 1, \dots, n$ ).  $\underline{s}^*$  und  $\underline{w}^*$  sind Spaltenmatrizen mit den Elementen

$$\left. \begin{aligned} s_j^* &= s_j + \omega_b \times (\omega_b \times c_{bj}) \\ &\quad - \omega_j \times (\omega_j \times c_j) + 2\omega_b \times v_j, \\ w_j^* &= w_j + \omega_b \times \Omega_j \\ &\quad (j = 1, \dots, n; \quad b = b(j)). \end{aligned} \right\} \quad (1-48)$$

Weitere Einzelheiten und Verallgemeinerungen siehe in [3].

## 2 Statik starrer Körper

Gegenstand der Statik starrer Körper sind Gleichgewichtszustände von Systemen starrer Körper und Bedingungen für Kräfte an und in derartigen Systemen im Gleichgewichtszustand. Gleichgewicht bedeutet entweder den Zustand der Ruhe oder einen speziellen Bewegungszustand (siehe 2.1.11). Im Gleichgewichtszustand verhalten sich auch nichtstarre Systeme wie starre Körper, z. B. ein biegeschlaffes Seil und eine stationär rotierende elastische Scheibe. Die Statik starrer Körper ist auch auf derartige Zustände anwendbar.

### 2.1 Grundlagen

#### 2.1.1 Kraft. Moment

Eine *Kraft* ist ein Vektor mit einem Angriffspunkt, einer Richtung und einem Betrag. Angriffspunkt und Richtung definieren die Wirkungslinie der Kraft (Bild 2-1). Die Dimension der Kraft ist Masse  $\times$  Länge/Zeit<sup>2</sup>, und die SI-Einheit ist das Newton: 1 N = 1 kgm/s<sup>2</sup>. Bei deformierbaren Körpern ändert sich die Wirkung einer Kraft, wenn eines ihrer Merkmale Angriffspunkt, Richtung und Betrag geändert wird. Die Wirkung auf einen starren Körper ändert sich nicht, wenn die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird. Für Kräfte sind zwei verschiedene zeichnerische Darstellungen üblich. In



**Bild 2-1.** a Kennzeichnung einer Kraft durch den Vektor  $F$ . b Kennzeichnung durch die Koordinate  $F$  entlang der gezeichneten Richtung

Bild 2-1a kennzeichnet das Symbol  $F$ , ebenso wie in diesem Satz, die Kraft mitsamt ihren Merkmalen Angriffspunkt, Richtung und Betrag. Dagegen ist  $F$  in Bild 2-1b die Koordinate der Kraft in der mit dem Pfeil gekennzeichneten Richtung. Wenn sie positiv ist, dann hat die Kraft die Richtung des Pfeils, und wenn sie negativ ist, die Gegenrichtung.

Das *Moment* einer Kraft  $F$  bezüglich eines Punktes  $A$  (oder „um  $A$ “) ist das Vektorprodukt  $M^A = r \times F$  mit dem Vektor  $r$  von  $A$  zu einem beliebigen Punkt der Wirkungslinie von  $F$  (Bild 2-2). Die SI-Einheit für Momente ist das Newtonmeter Nm.

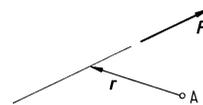
#### 2.1.2 Äquivalenz von Kräftesystemen

Zwei ebene oder räumliche Kräftesysteme heißen einander *äquivalent*, wenn sie an einem einzelnen starren Körper dieselben Beschleunigungen verursachen.

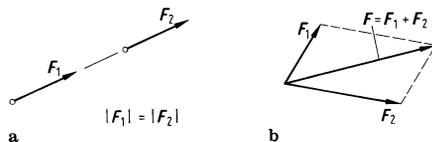
*Verschiebungssaxiom:* Zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  sind einander äquivalent, wenn jede von beiden durch Verschiebung entlang ihrer Wirkungslinie in die andere überführt werden kann (Bild 2-3a).

*Parallelogrammsaxiom:* Zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  mit gemeinsamem Angriffspunkt sind zusammen einer einzelnen Kraft  $F$  äquivalent, die nach Bild 2-3b die Diagonale des Kräfteparallelogramms bildet.  $F$  heißt *Resultierende* oder (Vektor-)Summe der beiden Kräfte:  $F = F_1 + F_2$ .

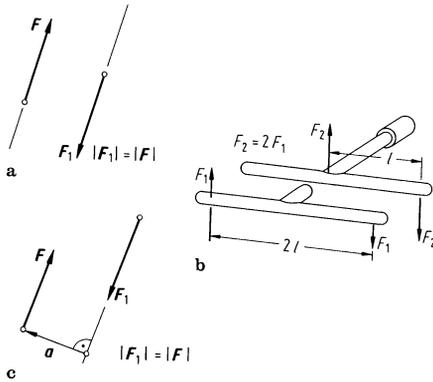
Ein *Kräftepaar* besteht aus zwei Kräften mit gleichem Betrag und entgegengesetzten Richtungen auf zwei parallelen Wirkungslinien (Bild 2-4a). Zwei Kräftepaare sind einander äquivalent, wenn sie in parallelen



**Bild 2-2.** Das Moment von  $F$  um  $A$  ist  $r \times F$



**Bild 2-3.** Zur Erläuterung des Verschiebungssaxioms a und des Parallelogrammsaxioms b



**Bild 2-4.** a Ein Kräftepaar. b Zwei einander äquivalente Kräftepaare an einem Schraubenschlüssel. c Das Moment  $a \times F$  eines Kräftepaars

Ebenen liegen und denselben Drehsinn und dasselbe Produkt „Kraftbetrag  $\times$  Abstand der Wirkungslinien“ haben. Bild 2-4b zeigt zwei einander äquivalente Kräftepaare an einem Schraubenschlüssel. Ein Kräftepaar hat für jeden Bezugspunkt A dasselbe Moment, wie für den ausgezeichneten Punkt in Bild 2-4c, nämlich das Moment  $a \times F$ . Ein Kräftepaar und dieses frei verschiebbare Moment sind ein und dasselbe.

### 2.1.3 Zerlegung von Kräften

Eine Kraft  $F$  lässt sich in der Ebene eindeutig in zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  und im Raum eindeutig in drei Kräfte  $F_1, F_2$  und  $F_3$  mit vorgegebenen Richtungen zerlegen. Bei Zerlegung in einem beliebigen kartesischen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $e_x, e_y$  und  $e_z$  ist  $F = F_x e_x + F_y e_y + F_z e_z$  mit

$$F_i = F \cdot e_i = |F| \cos \langle (F, e_i) \rangle \quad (i = x, y, z) \quad (2-1)$$

Die vorzeichenbehafteten Skalare  $F_x, F_y$  und  $F_z$  heißen Koordinaten von  $F$ , und die Vektoren  $F_x e_x, F_y e_y$  und  $F_z e_z$  heißen Komponenten von  $F$ . Bei Zerlegung einer Kraft  $F$  in drei nicht zueinander orthogonale Richtungen mit Einheitsvektoren  $e_1, e_2$  und  $e_3$  ist

$$F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3 \quad \text{mit}$$

$$F_i = F \cdot (e_j \times e_k) / (e_1 \cdot (e_2 \times e_3))$$

( $i, j, k = 1, 2, 3$  zyklisch vertauschbar).

Die ebene Zerlegung einer Kraft  $F$  in zwei Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  ist auch grafisch nach Bild 2-3b möglich.

### 2.1.4 Resultierende von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt

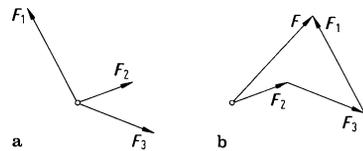
Die Resultierende  $F$  von mehreren in einem Punkt angreifenden Kräften  $F_1, \dots, F_n$  ist  $F = F_1 + \dots + F_n$ . Sie greift im selben Punkt an. In einem  $x, y, z$ -System hat sie die Koordinaten

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (2-2)$$

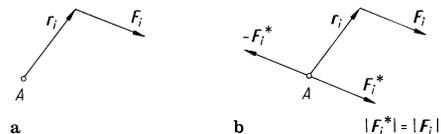
Bei einem ebenen Kräftesystem  $F_1, \dots, F_n$  (Bild 2-5a) kann man den Betrag und die Richtung der Resultierenden  $F$  grafisch nach Bild 2-5b konstruieren. Dabei werden Parallelen zu den Kräften  $F_1, \dots, F_n$  in beliebiger Reihenfolge mit einheitlichem Durchlaufsinne der Pfeile aneinandergereiht. Die Figur heißt *Kräftepolygon* oder *Krafteck*.

### 2.1.5 Reduktion von Kräftesystemen

Jedes ebene oder räumliche System von Kräften  $F_1, \dots, F_n$  lässt sich auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar reduzieren, die zusammen dem Kräftesystem äquivalent sind. Dabei ist der Angriffspunkt A der Einzelkraft beliebig wählbar. Bild 2-6 zeigt die Reduktion am Beispiel einer einzigen Kraft  $F_i$ . Das System in Bild 2-6b ist dem System in Bild 2-6a äquivalent. Es besteht aus der in den Punkt A parallelverschobenen Einzelkraft  $F_i^*$  und dem Kräftepaar



**Bild 2-5.** a Lageplan mit Kräften  $F_1, F_2, F_3$ . b Kräfteplan zur Konstruktion der Resultierenden  $F$



**Bild 2-6.**  $F_i^*$  und das frei verschiebbare Moment der Größe  $r_i \times F_i$  in Bild b sind gemeinsam der Kraft  $F_i$  in Bild a äquivalent