

23



Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

Inga Niedermeyer

Räumliche Perspektivübernahme am Schulanfang

Eine Interviewstudie zum
Einfluss der Symmetrie

WAXMANN

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik

herausgegeben von

Götz Krummheuer
und Aiso Heinze

Band 23

Wissenschaftlicher Beirat

Tommy Dreyfus (Tel Aviv University, Israel)
Uwe Gellert (Freie Universität Berlin)
Gabriele Kaiser (Universität Hamburg)
Christine Knipping (Universität Bremen)
Konrad Krainer (Universität Klagenfurt, Österreich)
Kristina Reiss (Technische Universität München)
Kurt Reusser (Universität Zürich, Schweiz)
Heinz Steinbring (Universität Duisburg-Essen)

Editorial

Der Mathematikunterricht steht vor großen Herausforderungen: Neuere empirische Untersuchungen legen (erneut) Defizite und Unzulänglichkeiten offen, deren Analyse und Behebung einer umfassenden empirischen Erforschung bedürfen. Der Erfolg derartiger Bemühungen hängt in umfassender Weise davon ab, inwieweit hierbei auch mathematikdidaktische Theoriebildung stattfindet. In der Reihe „Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik“ werden dazu empirische Forschungsarbeiten veröffentlicht, die sich durch hohe Standards und internationale Anschlussfähigkeit auszeichnen. Das Spektrum umfasst sowohl grundlagentheoretische Arbeiten, in denen empirisch begründete, theoretische Ansätze zum besseren Verstehen mathematischer Unterrichtsprozesse vorgestellt werden, als auch eher implementative Studien, in denen innovative Ideen zur Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse erforscht und deren theoretischen Grundlagen dargelegt werden. Alle Manuskripte müssen vor Aufnahme in die Reihe ein Begutachtungsverfahren positiv durchlaufen. Diese konsequente Begutachtung sichert den hohen Qualitätsstandard der Reihe.

Inga Niedermeyer

Räumliche Perspektivübernahme am Schulanfang

Eine Interviewstudie zum Einfluss der Symmetrie



Waxmann 2015
Münster / New York

Diese Arbeit wurde im Jahr 2014 von der Fakultät Bildung der Leuphana Universität Lüneburg als Dissertation angenommen.

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 23

ISSN 1868-1441

Print-ISBN 978-3-8309-3272-7

E-Book-ISBN 978-3-8309-8272-2

© Waxmann Verlag GmbH, Münster 2015

www.waxmann.com

info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Christian Averbeck, Münster

Titelbild: © Inga Niedermeyer

Druck: Hubert und Co., Göttingen

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier, säurefrei gemäß ISO 9706



Printed in Germany

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Personen danken, die mich während der Promotionszeit begleitet und damit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Den Anstoß zur Promotion und zum Thema der vorliegenden Arbeit verdanke ich meiner Doktormutter Prof. Dr. Silke Ruwisch. Sie hat mich während des gesamten Prozesses hervorragend gefördert und gefordert, sich immer Zeit genommen, meine Fragen und Überlegungen zu besprechen und mir gleichzeitig die Freiheit gelassen, eigene Entscheidungen zu treffen. Liebe Silke, ich danke dir von Herzen für deine Betreuung und Begleitung auf meinem wissenschaftlichen Weg!

Ein großes Dankeschön gilt auch meiner Zweitgutachterin Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, die mir und meiner Arbeit immer mit großem Interesse und sehr ermutigend begegnet ist und mir viele konstruktive Rückmeldungen gegeben hat. Vielen Dank dafür!

Außerdem geht mein Dank an meinen Drittgutachter Prof. Dr. Dominik Leiß sowie das gesamte Kollegium des Instituts für Mathematik und ihre Didaktik der Leuphana Universität Lüneburg. Vielen Dank für viele konstruktive Kolloquien, Gespräche zwischen Tür und Angel sowie gemeinsam verbrachte (Mensa-)Zeit!

Den beteiligten Schülerinnen und Schülern, Lehrkräften sowie Schulleitungen danke ich für die Bereitschaft, an meiner Studie teilzunehmen und für die Unterstützung der Interviewdurchführung.

Danke sage ich auch meinen Kolleginnen und Kollegen in Kiel, die mir während der ersten Monate am IPN Zeit und Freiräume gelassen haben, meine Dissertation zu Ende zu schreiben.

Nicht zuletzt geht mein Dank an meine Familie und Freunde für alle Unterstützung und Begleitung.

Zusammenfassung

Räumliches Vorstellungsvermögen und Symmetrie bilden neben geometrischen Figuren und Körpern Schwerpunkte im Geometrieunterricht an Grundschulen. Räumliche Perspektivübernahme als die Fähigkeit, sich vorstellen zu können, wie Gegenstände aus einer anderen als der eigenen Perspektive betrachtet aussehen, stellt dabei eine Teilkompetenz des räumlichen Vorstellungsvermögens dar.

Einzelne Befunde aus empirischen Studien deuten darauf hin, dass ein Zusammenhang zwischen Symmetrie und räumlicher Perspektivübernahme besteht. So lassen die Ergebnisse aus einer Studie zum räumlichen Vorstellungsvermögen von Vorschulkindern (Lüthje 2010) vermuten, dass Aufgaben mit symmetrischen Objekten schwieriger sind als Aufgaben mit unsymmetrischen Objekten: Die Kinder verwechselten häufiger die bei symmetrischen Objekten zueinander spiegelbildlichen Ansichten.

Um der Frage nach dem Einfluss symmetrischer Objekte bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme systematisch nachzugehen, wurde die empirische Studie konzipiert, die in diesem Buch vorgestellt wird. In Einzelinterviews lösten 95 Kinder am Schulanfang ein systematisch variiertes Aufgabenset und wurden aufgefordert, ihre Lösungen zu begründen. Neben der Symmetrie der Objekte wurden auch die Objektart, die Ausrichtung der Objekte, sowie die Art der Ansicht variiert.

Die Ergebnisse zeigen bezogen auf die Lösungsraten der Kinder keine Unterschiede zwischen Aufgaben mit symmetrischen und Aufgaben mit unsymmetrischen Objekten. An den Fehlern der Kinder und vor allem an ihren Begründungen lässt sich jedoch erkennen, dass es den Kindern schwer fiel, sich bei symmetrischen Objekten auf die Ausrichtung der Objekte zu beziehen. Bei den unsymmetrischen Objekten auf markante Merkmale oder die Vorne-hinten-Dimension einzugehen, fiel ihnen dagegen leichter.

Auf der Grundlage der gewonnenen Daten ergibt sich so ein differenziertes Bild der Fähigkeit zur räumlichen Perspektivübernahme von Kindern am Schulanfang und der Besonderheiten von Aufgaben mit symmetrischen Objekten.

Abstract

Spatial abilities and symmetry are key issues in geometry lessons in primary schools – besides geometrical shapes. Spatial perspective-taking as the ability to imagine how objects appear from another point of view than one's own is an essential component of spatial ability.

Findings from empirical studies indicate that there is a relationship between spatial perspective-taking and symmetry. The results of a study about spatial abilities of preschoolers (Lüthje 2010) suggest for instance that tasks with symmetrical objects are more demanding than tasks with asymmetrical objects: the children often confused the side views of symmetrical objects that are mirror-images of each other. However, the relationship of symmetry and spatial perspective-taking was not an objective of empirical research yet.

Therefore, the study that is presented in this book was designed in order to investigate the influence of symmetrical objects on spatial perspective tasks systematically. In individual interviews 95 children at the beginning of first grade (average age: 6 years 8 months) were asked to solve a systematically varied set of tasks and to explain their solution after each task. Besides the symmetry of objects also their type, their orientation, and the kind of view were varied.

Results regarding the solution rates show no differences between tasks with symmetrical objects and tasks with asymmetrical objects. However, the types of errors and especially the children's explanations indicate that the children had difficulties to refer to the orientation of objects when being confronted with symmetrical objects. It was much easier for them to refer to distinctive features of the object or to the front-back-dimension when asymmetrical objects were presented.

Based on the collected data a differentiated picture of first-graders' abilities in spatial perspective-taking and of the special characteristics of tasks with symmetrical objects can be gained.

Inhalt

Einleitung	15
1 Räumliche Perspektivübernahme	20
1.1 Räumliche Perspektivübernahme im Kontext der Raumvorstellung	20
1.2 Theoretische Modelle zur Entwicklung der räumlichen Perspektivübernahme	23
1.2.1 Die Arbeit von Jean Piaget und Bärbel Inhelder.....	23
1.2.2 Die Arbeit von John H. Flavell und seinen Kolleginnen und Kollegen	27
1.2.3 Bestätigung und Ausdifferenzierung des Modells von Flavell et al.	29
1.3 Aufgabenmerkmale und ihr Einfluss auf die räumliche Perspektivübernahme	33
1.3.1 Die Aufgabenstellung.....	34
1.3.2 Der andere Betrachter	45
1.3.3 Die eingesetzten Objekte.....	48
1.4 Das Lösen von Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme	54
1.4.1 Vorgehensweisen beim Lösen von Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme.....	54
1.4.2 Fehler beim Lösen von Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme.....	60
2 Symmetrie	69
2.1 Symmetrieverständnis von Kindern	72
2.1.1 Implizite Wahrnehmung von Symmetrien	73
2.1.2 Explizites Wissen über (Achsen-)Symmetrie	75
2.2 Symmetrie als Einflussfaktor	76
2.2.1 Symmetrie als Einflussfaktor bei Gedächtnisaufgaben	76
2.2.2 Ausrichtung von Objekten	77
2.2.3 Die Links-rechts-Dimension und -Unterscheidung.....	80

3	Zielsetzung, Fragestellung und Hypothesen der Untersuchung.....	84
4	Konzeption des Untersuchungsdesigns.....	86
4.1	Methodologischer Rahmen.....	86
4.2	Revidierte klinische Interviews als Untersuchungsmethode	88
4.3	Aufgabenstellung und Material	90
4.3.1	Aufgabenstellung.....	90
4.3.2	Material.....	92
4.3.3	Reihenfolge der Items im Interview	97
4.3.4	Begründung des Designs und Diskussion möglicher Alternativen	98
4.3.5	Einführung	106
4.3.6	Interviewerverhalten	107
4.4	Ausdifferenzierung der Forschungsfragen und Hypothesen bezogen auf das gewählte Design	110
5	Datenerhebung und Auswertung	114
5.1	Stichprobe	114
5.2	Durchführung und Dokumentation der Interviews	114
5.3	Auswertungsmethoden.....	116
5.3.1	Auswertung der Aufgabenlösungen.....	116
5.3.2	Auswertung der Begründungen.....	118
5.3.3	Auswertung weiterer Aspekte	121
5.4	Kategoriensystem zur Auswertung der Begründungen.....	122
5.4.1	Kategorien für Begründungen zu Items mit Tieren	122
5.4.2	Kategorien für Begründungen zu Items mit Quaderbauwerken	125
6	Ergebnisse	128
6.1	Lösungsraten und Fehler.....	128
6.1.1	Lösungsraten der gesamten Stichprobe	128
6.1.2	Lösungsraten einzelner Items.....	129
6.1.3	Fehlertypen und ihre Verteilung.....	137

6.2 Begründungen	148
6.2.1 Begründungen zu Items mit Vorder-/Hinteransichten	148
6.2.1.1 Items mit Vorder-/Hinteransichten von Tieren	148
6.2.1.2 Items mit Vorder-/Hinteransichten von Quaderbauwerken	151
6.2.1.3 Zusammenfassung zu Items mit Vorder-/Hinteransichten ...	153
6.2.2 Begründungen zu Items mit Seitenansichten.....	154
6.2.2.1 Items mit Seitenansichten von Tieren.....	155
6.2.2.2 Items mit Seitenansichten von Quaderbauwerken	167
6.2.2.3 Zusammenfassung zu Items mit Seitenansichten	178
6.3 Ergänzende Erkenntnisse	179
6.3.1 Erkenntnisse zur räumlichen Perspektivübernahme von Kindern am Schulanfang.....	179
6.3.2 Erkenntnisse zur Besonderheit von Aufgaben mit symmetrischen Objekten bei der räumlichen Perspektivübernahme.....	188
7 Diskussion.....	193
7.1 Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse	193
7.1.1 Räumliche Perspektivübernahme von Kindern.....	193
7.1.2 Der Einfluss der Symmetrie auf die räumliche Perspektivübernahme.....	195
7.2 Kritische Reflexion der Untersuchung	198
7.3 Ausblick.....	201
7.3.1 Konsequenzen für den Mathematikunterricht der Grundschule	201
7.3.2 Konsequenzen für die Forschung	202
Literatur	204

Anhang	214
A Protokollbögen	214
B Kategoriensystem-Tabellen.....	217
C Erklärungen zur unterschiedlichen Codierung von ähnlichen Begründungen	226
D Häufigkeiten der verschiedenen Begründungskategorien bei einzelnen Items.....	230
E Aufgabenübersicht	234

Einleitung

Die folgende Situation ist einem Interview entnommen, das im Rahmen der vorliegenden Arbeit geführt wurde. Vor dem Erstklässler Timo¹ steht ein Spielzeugdelfin, und zwar so, dass er aus Timos Sicht nach links schaut. Vier Spielzeugmännchen stehen um den Delfin herum. Das rote Männchen, um das es im folgenden Interviewabschnitt geht, steht dabei zwischen Timo und dem Delfin. Die Ansicht des Männchens stimmt also mit Timos Ansicht überein. Die unten abgebildeten Fotos des Delfins (siehe Abbildung 1) liegen ebenfalls auf dem Tisch.

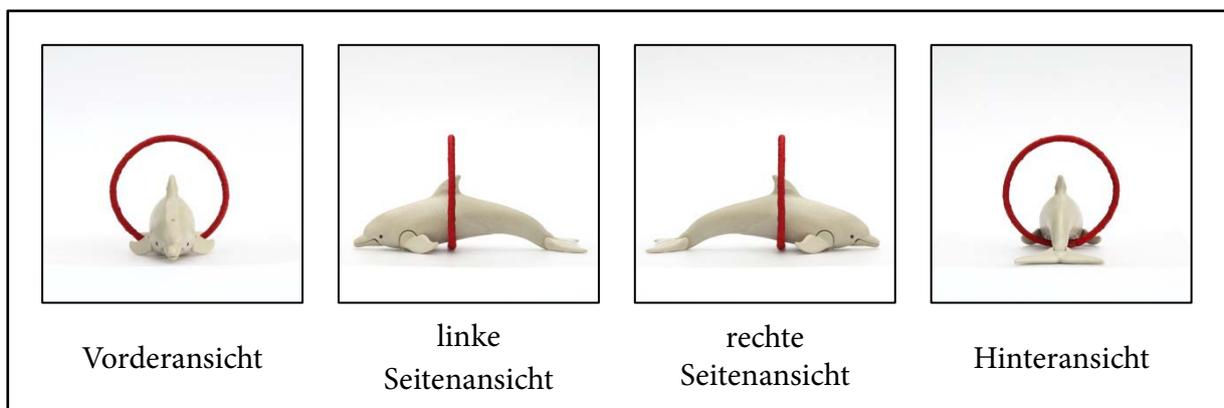


Abbildung 1: Ansichten des Delfins

Interviewerin: „Welches Foto hat das rote Männchen gemacht?“

Timo: (wählt die richtige (linke) Seitenansicht)

Interviewerin: „Warum?“

Timo: „Wegen hier (zeigt auf den Delfin) ist die Flosse unten und da (zeigt auf das Foto) ist die Flosse unten.“

Interviewerin: „Und warum ist es nicht DAS Foto (zeigt auf die andere (rechte) Seitenansicht)? Weil das sieht ja fast genauso aus, ne?“

1 Die Namen aller Kinder wurden geändert.

- Timo: (überlegt) „Hm, stimmt.“ (überlegt sehr lange) „Die sind beide ganz schön schwierig.“ (überlegt) „Das.“ (zeigt auf die falsche Seitenansicht).
- Interviewerin: „Was ist denn der Unterschied zwischen den beiden Fotos?“
- Timo: „DIE Flosse (zeigt am richtigen Foto auf die Seitenflosse) ist 'n Ticken weiter unten und DIE (zeigt auf die falsche Seitenansicht) ist 'n Ticken weiter oben.“
- Interviewerin: „Guck mal, einmal guckt der Delfin in DIE Richtung (zeigt die Blickrichtung des Delfins an der linken Seitenansicht) und einmal in DIE Richtung (zeigt die Blickrichtung des Delfins an der rechten Seitenansicht), ne?“
- Timo: „Dann ist der es (zeigt auf die richtige Seitenansicht).“

Dieser Interviewausschnitt verdeutlicht die Schwierigkeiten, die durch die Symmetrie eines Objektes und die daraus folgende Tatsache, dass zwei Ansichten zueinander symmetrisch sind, bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme entstehen.

Timo wählt zunächst das richtige Foto aus. Da er in der Begründung seiner Lösung jedoch nicht auf die unterschiedliche Blickrichtung des Delfins auf den beiden Fotos eingeht, fragt die Interviewerin nach. Timos Antwort deutet darauf hin, dass er den Unterschied in der Links-rechts-Ausrichtung nicht wahrnimmt. Er benennt stattdessen angebliche Detail-Unterschiede zwischen den Fotos („die Flosse ist unten“) und zieht folglich auch die falsche Seitenansicht als richtige Lösung in Betracht. Erst als die Interviewerin ihn explizit auf die unterschiedliche Blickrichtung des Delfins hinweist, kann Timo sich sicher für die richtige Seitenansicht entscheiden.

Bemerkenswert an dieser Situation ist, dass die Aufgabe ohne räumliche Vorstellungsfähigkeiten hätte gelöst werden können. Timo hätte die Fotos nur mit seiner eigenen Ansicht vergleichen müssen, da nach der Ansicht des roten Männchens gefragt wurde, das zwischen Timo und dem Delfin stand. Trotzdem empfindet Timo diese Aufgabe als „schwierig“. Wenn selbst bei dieser Aufgabe

die Symmetrie Schwierigkeiten bereitet, kann davon ausgegangen werden, dass sie bei Aufgaben, bei denen eine tatsächliche Perspektivübernahme erforderlich ist, ebenfalls Einfluss nimmt.

Auslöser für die Auseinandersetzung mit der Symmetrie bei der räumlichen Perspektivübernahme waren ähnliche Beobachtungen, die Thomas Lüthje (2010) im Rahmen seiner Dissertation machte. In seiner Untersuchung mit 65 Vorschulkindern zu verschiedenen Aspekten des räumlichen Vorstellungsvermögens traten bei einer Aufgabe zur räumlichen Perspektivübernahme Ergebnisse auf, die vermuten lassen, dass die Symmetrie von Objekten und die daraus folgende Tatsache, dass zwei Ansichten symmetrisch zueinander sind, den Kindern große Schwierigkeiten bereiten. Bei einem symmetrischen Quaderbauwerk wechselten die Kinder häufig zwei zueinander symmetrische Ansichten – und dies auch dann, wenn eine davon ihrer eigenen Ansicht entsprach. Eine analoge Aufgabe mit einem unsymmetrischen Bauwerk bereitete den Kindern dagegen deutlich weniger Schwierigkeiten. Aus diesen Ergebnissen heraus erwuchs die Annahme, dass die Symmetrie der zu betrachtenden Objekte bzw. Objektanordnungen den Kindern die räumliche Perspektivübernahme erschwert, während in anderen Zusammenhängen Symmetrie eher erleichternd wirkt.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, den Zusammenhang zwischen dem Lösungsverhalten von Kindern bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme und der Symmetrie der zu betrachtenden Objekte bzw. Objektanordnungen zu klären.

Dies ist zum einen für die Forschung zur räumlichen Perspektivübernahme relevant, da in vielen Studien symmetrische Objekte zum Einsatz kamen, ohne dass dabei über die Symmetrie reflektiert wurde. Wenn sich der Einfluss der Symmetrie auf das Lösungsverhalten der Kinder zeigen lässt, müssten die Ergebnisse derartiger Studien rückwirkend auf diesen Aspekt hin analysiert werden. Zum anderen ist die vorliegende Studie auch für den Mathematikunterricht der Grundschule von Bedeutung: Bestätigt sich der Einfluss der Symmetrie, sollten Lehrkräfte für die Schwierigkeiten symmetrischer Objekte sensibilisiert werden, um Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme gezielt auswählen und

Fehler, die in der Symmetrie der Objekte begründet liegen, erkennen und thematisieren zu können.

Um die Zielsetzung der Arbeit zu verfolgen, erfolgt zunächst eine Aufarbeitung der Literatur. Der theoretische Teil gliedert sich entsprechend der zwei Aspekte „Räumliche Perspektivübernahme“ und „Symmetrie“ in zwei Kapitel. Das erste Kapitel setzt sich mit der räumlichen Perspektivübernahme und der dazu bestehenden Forschung auseinander. Neben einer Definition der räumlichen Perspektivübernahme und einer Beschreibung von Modellen zur Entwicklung der räumlichen Perspektivübernahme bei Kindern, stellt die Beschreibung der Forschung zu Aufgabenmerkmalen einen besonders wichtigen Abschnitt dar. Die Einflüsse, die für verschiedene Aufgabenmerkmale nachgewiesen wurden, bilden die Basis für den empirischen Teil der vorliegenden Arbeit.

Im zweiten Kapitel liegt der Fokus auf der Symmetrie und ihrer Wahrnehmung. Dabei geht es nicht nur um die Wahrnehmung der Symmetrie als *Eigenschaft* eines Objektes, sondern auch um die Unterscheidung *zueinander* symmetrischer Figuren und damit verbunden um die Links-rechts-Relation.

Den Übergang zum empirischen Teil der vorliegenden Arbeit bilden in Kapitel 3 die Präzisierung der Zielsetzung und Fragestellung der vorliegenden Untersuchung, sowie die Formulierung von Hypothesen und Vermutungen zum Zusammenhang zwischen räumlicher Perspektivübernahme und der Symmetrie der Objekte.

Um die Forschungsfrage empirisch zu beantworten, wurden mit 95 Schulanfängerinnen und Schulanfängern Interviews geführt, in denen die Kinder systematisch variierte Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme gelöst haben und zur Begründung ihrer Lösung aufgefordert wurden. Die Konzeption dieses Untersuchungsdesigns wird in Kapitel 4 vorgestellt und mit Bezug zu den Ausführungen zur bereits bestehenden Forschung begründet. In Kapitel 5 folgen Ausführungen zur Datenerhebung und Auswertung, unter anderem die Vorstellung eines Kategoriensystems, das zur qualitativen Analyse der Begründungen der Kinder entwickelt wurde. Neben den Begründungen interessieren aber auch die Lösungsraten verschiedener Aufgaben – vor allem im Vergleich zwischen Aufgaben mit symmetrischen und unsymmetrischen Objekten – sodass

sich das folgende Kapitel 6 entsprechend gliedert: Zunächst werden die Lösungs-raten und Fehler analysiert und im Anschluss die Begründungen der Kinder. In einem dritten Abschnitt folgt die Darstellung weiterer Aspekte, die bei der Analyse der Interviews beobachtet wurden und über die Frage nach dem Einfluss der Symmetrie hinaus Erkenntnisse über die Fähigkeiten der Kinder zur Perspektiv-übernahme bringen.

Die vorliegende Arbeit wird in Kapitel 7 mit einer zusammenfassenden Dis-kussion der Ergebnisse, einer kritischen Reflexion der Studie sowie einem Aus-blick auf Konsequenzen für Forschung und Praxis abgeschlossen.

1 Räumliche Perspektivübernahme

Räumliche Perspektivübernahme wird definiert als die Fähigkeit, sich einzelne Objekte oder Anordnungen mehrerer Objekte aus unterschiedlichen Perspektiven vorstellen zu können (vgl. Cox 1977a, S. 76). Dazu gehört zum einen das *Wissen*, dass die meisten Objekte unterschiedlich aussehen, je nachdem, von welchem Standort man sie betrachtet. Zum anderen ist aber vor allem die *Fähigkeit* wichtig, sich vorstellen zu können, wie genau die andere Perspektive aussieht. Diese Unterscheidung spiegelt sich beispielsweise in folgender Aussage von Cox (1975) wider: „Success in a perspectives task depends on an *understanding* that objects, or group of objects, appear different from different viewpoints, and on the *ability* to predict by mental, and usually pictorial, representation the actual view from another position.“ (Cox 1975, S. 83, Hervorhebungen: I.N.). Fishbein et al. (1972) betonen ebenfalls: „In its broadest sense, coordination of perspectives refers to the *knowledge* that the appearance of objects is a function of the spatial position from which they are viewed, and to the *ability* to determine what that appearance will be for any specific viewing position.“ (Fishbein et al. 1972, S. 21, Hervorhebungen im Original; vgl. auch Coie et al. 1973, S. 168).

1.1 Räumliche Perspektivübernahme im Kontext der Raumvorstellung

Räumliche Perspektivübernahme kann als Teilbereich des Konzepts „Raumvorstellung“ (oder „Räumliches Vorstellungsvermögen“) angesehen werden, das viele verschiedene Teilkompetenzen umfasst. Seit den 1930er Jahren, als der Psychologe Luis Leon Thurstone mit Hilfe einer Faktorenanalyse „Raumvorstellung“ („space“) neben „perceptual speed“, „number“, „memory“, „reasoning“, „word fluency“ und „verbal comprehension“ als Teilkomponente der Intelligenz extrahierte und inhaltlich beschrieb (vgl. Thurstone 1950), sind viele Studien durchgeführt worden, die ebenfalls mit Hilfe der Faktorenanalyse das Konzept „Raumvorstellung“ weiter untersucht und verschiedene Teilkomponenten beschrieben haben (vgl. Guilford et al. 1952; Holzinger/Swineford 1946; Linn/Petersen 1985; Michael et al. 1957). Bei einer Faktorenanalyse werden mehrere

unterschiedliche Test-Items eingesetzt und mit Hilfe statistischer Verfahren zu sogenannten Faktoren zusammengefasst. Die Beschreibung und Benennung der einzelnen Faktoren muss dann aus theoretischen Überlegungen heraus geschehen. Da in verschiedenen Studien unterschiedliche Items zum Einsatz kamen, ist es nicht verwunderlich, dass auch unterschiedliche Faktoren extrahiert wurden, sodass ein Vergleich der unterschiedlichen Faktorenanalysen schwierig ist.

Aus theoretischen Überlegungen heraus entwickelte Peter H. Maier (1999) deshalb auf der Grundlage verschiedener faktorenanalytischer Studien ein Modell, auf das in der Mathematikdidaktik häufig zurückgegriffen wird (vgl. Grüßing 2012; Lüthje 2010; Plath 2014). Dieses Modell ermöglicht es, Aufgaben zur Raumvorstellung nach der Art der intendierten Denkvorgänge zu unterscheiden. Maier (1999) bezieht sich dabei hauptsächlich auf die Drei-Faktoren-Hypothese von Thurstone (1950) sowie das Kategoriensystem von Linn und Petersen (1985).

Standpunkt der Probanden	Dynamische Denkvorgänge Räumliche Relationen am Objekt veränderlich	Statische Denkvorgänge Räumliche Relationen am Objekt unveränderlich; Relation der Person zum Objekt veränderlich
Person befindet sich außerhalb	Veranschaulichung	Räumliche Beziehungen
	Vorstellungsfähigkeit von Rotationen	
Person befindet sich innerhalb	Räumliche Orientierung	Räumliche Wahrnehmung
		Faktor K

Abbildung 2: Komponenten der Raumvorstellung (nach: Maier 1999, S. 52)

Im Modell werden fünf bzw. sechs³ Komponenten danach unterschieden, ob die intendierten Denkvorgänge dynamisch oder statisch sind und ob sich die Versuchsperson außerhalb oder innerhalb der Aufgabensituation befindet (siehe Abbildung 2).

Die räumliche Perspektivübernahme, wie sie in der vorliegenden Arbeit definiert wird, lässt sich dem Bereich „Räumliche Orientierung“ zuordnen. Bei der intendierten Strategie befindet sich die Versuchsperson innerhalb der Aufgabensituation, da sie sich gedanklich an einen anderen Standort versetzen muss, um sich die entsprechende Ansicht vorstellen zu können. Dieser Denkvorgang des „Sich-an-einen-anderen-Standort-Versetzens“ ist ein dynamischer Denkvorgang. Das Objekt selbst wird dabei nicht verändert, doch die Relationen zwischen Objektteilen und dem Betrachter ändern sich.

Neben dieser Strategie, sich in den anderen Betrachter hineinzusetzen, lassen sich Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme jedoch auch auf andere Weise lösen und ähneln dann anderen Komponenten der Raumvorstellung. Die Versuchsperson kann beispielsweise auch die zu betrachtenden Objekte gedanklich soweit drehen, dass die eigene Perspektive mit der des anderen Betrachters übereinstimmt. Dieses Vorgehen entspricht in Maier's Modell der Komponente „Vorstellungsfähigkeit von Rotationen“, die oft auch mit dem Begriff „Mentale Rotation“ bezeichnet wird. Aber auch Bezüge zur Komponente „Räumliche Beziehungen“ lassen sich bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme erkennen, und zwar dann, wenn die Versuchsperson die Relationen zwischen dem anderen Betrachter und den Objekten bzw. zwischen verschiedenen Objekten in den Blick nimmt. Sie kann beispielsweise analysieren, welches Objekt bzw. welcher Teil eines Objektes dem Betrachter am nächsten ist. Dieser Denkvorgang ist im Gegensatz zu den beiden anderen Strategien statisch.

Da der Betrachter Teil der Aufgabensituation ist und die Relation zwischen Betrachter und Objekt eine wichtige Rolle spielt, lässt sich die räumliche Perspektivübernahme nur schwer mit Paper-and-Pencil-Tests erfassen. Dies ist laut Maier (1999) der Grund dafür, dass sich in den oben genannten faktorenanalyti-

3 Der Faktor K wird teilweise der räumlichen Orientierung zugeordnet und dann nicht als eigenständige Komponente betrachtet.

schen Studien zur Raumvorstellung nur wenige Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme finden (vgl. Maier 1999, S. 41). Die folgenden Ausführungen zum Forschungsstand zur räumlichen Perspektivübernahme beziehen sich daher auch ausschließlich auf Studien, die in Form von Einzelinterviews durchgeführt wurden.

1.2 Theoretische Modelle zur Entwicklung der räumlichen Perspektivübernahme

Im Folgenden wird die Entwicklung der Fähigkeit zur räumlichen Perspektivübernahme im Laufe der Kindheit in den Blick genommen. Die Arbeit von Jean Piaget und Bärbel Inhelder (1999, französische Erstausgabe 1948) ist dabei eine, die in nahezu allen nachfolgenden Studien zur räumlichen Perspektivübernahme erwähnt wird. Piaget und Inhelder (1999) untersuchten mit ihrem bekannten Drei-Berge-Versuch die Fähigkeiten von Kindern zwischen vier und zwölf Jahren. Sie konnten in den unterschiedlichen Reaktionen der Kinder auf die Aufgabensituation unterschiedliche Stadien der räumlichen Perspektivübernahme identifizieren. Das zweite Modell, das in diesem Kapitel vorgestellt wird, bezieht sich nicht auf unterschiedliche Lösungsmuster der Kinder bei ein und derselben Aufgabensituation, sondern unterscheidet verschiedene Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade, die von Kindern unterschiedlicher Altersgruppen bewältigt werden. In einem dritten Abschnitt werden weitere Arbeiten vorgestellt, die die vorherigen Modelle bestätigen bzw. erweitern.

1.2.1 Die Arbeit von Jean Piaget und Bärbel Inhelder

In dem bekannten Drei-Berge-Versuch von Piaget und Inhelder (1999) platzierten die Autoren drei Pappmaché-Berge unterschiedlicher Höhe und Farbe, die sich zudem durch kleinere Details wie eine Hütte oder ein Gipfelkreuz unterschieden, vor Kindern im Alter zwischen vier und zwölf Jahren und testeten mit drei verschiedenen Aufgabenstellungen, wie gut die Kinder sich in die Position eines anderen Betrachters hineinversetzen konnten.

Die erste Aufgabenstellung für das Kind bestand darin, die Ansicht einer an unterschiedlichen Standorten platzierten Holzpuppe mit Hilfe dreier aus Pappe

ausgeschnittener „Berge“ nachzubilden, indem es die Pappstücke in den entsprechenden Relationen zueinander anordnete. Auch bei der zweiten Aufgabenstellung wurde die Puppe an unterschiedlichen Standorten platziert, das Kind hatte jedoch die Aufgabe, aus zehn verschiedenen Fotos der Bergformation diejenige Ansicht auszuwählen, die der Position der Puppe entsprach. Bei der dritten Aufgabenstellung wurde eines der zehn Fotos aus Aufgabenstellung 2 ausgewählt und das Kind sollte die Holzpuppe an den Standort stellen, von dem aus betrachtet die Bergformation so aussah wie auf dem Foto abgebildet (vgl. Piaget/Inhelder 1999, S. 251ff.).

Bei der Untersuchung von 100 Kindern im Alter von vier bis zwölf Jahren konnten Piaget und Inhelder (1999) drei Stadien der räumlichen Perspektivübernahme ausmachen: Im ersten Stadium verstanden die Kinder die Aufgabenstellung nicht; hier war eine genauere Untersuchung nicht möglich. Das zweite Stadium ist durch eine fehlende Differenzierung der eigenen Ansicht von der Ansicht eines anderen Betrachters gekennzeichnet. Die Kinder rekonstruierten die Relationen zwischen den Bergen so, wie sie selbst sie wahrnahmen, auch wenn sie Versuche starteten, diese Ansicht zum anderen Betrachter hin auszurichten. Im dritten Stadium gelang es den Kindern, die Relationen der Berge zueinander aus der Perspektive des anderen Betrachters zu beachten, auch wenn sie dies nur bei einem Teil der relevanten Relationen korrekt ausführten. Zweites und drittes Stadium konnten jeweils noch in zwei Teilstadien untergliedert werden, die im Folgenden etwas ausführlicher beschrieben werden.

Teilstadium II A

Piaget und Inhelder gehen davon aus, dass Kinder dieses Stadiums „glauben, ihr eigener Blickwinkel sei der einzig mögliche“ (Piaget/Inhelder 1999, S. 254) und sprechen von einer „Egozentrik der Vorstellung“ (Piaget/Inhelder 1999, S. 259). Sie betonen aber gleichzeitig, dass der Egozentrismus „unbewußter [sic!] Natur“ sei (Piaget/Inhelder 1999, S. 262).

Beim Nachbilden der Ansicht durch die drei Pappstücke reproduzierten die untersuchten Kinder ihre eigene Ansicht. Nach einem Wechsel ihres eigenen Standortes konnten sie aus dem Gedächtnis auch die Ansicht ihres vorherigen Standortes nachbilden, jedoch keine, die sie selbst noch nicht wahrgenommen