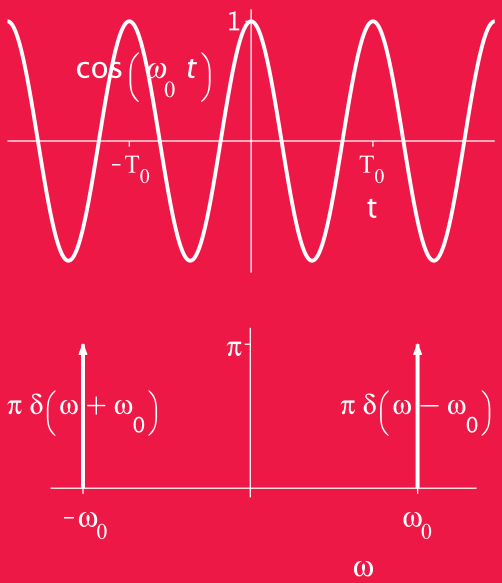
vdf Lehrbuch

Mathematik

Fourier-Transformation

Beispiele, Aufgaben, Anwendungen



Herbert Sager

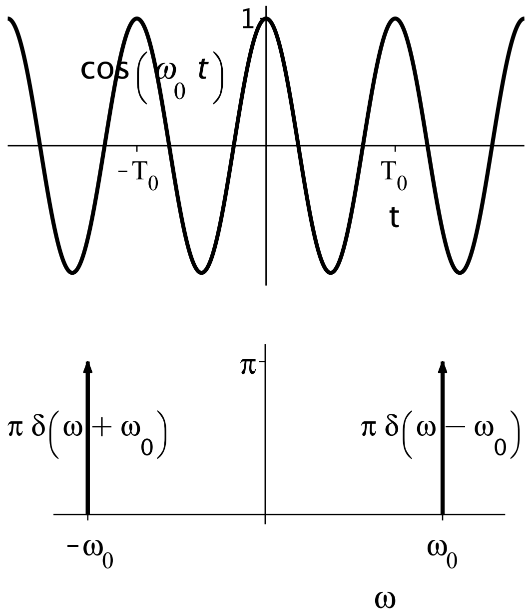
vdf

vdf Hochschulverlag AG
an der ETH Zürich

Herbert Sager

Fourier-Transformation

Beispiele, Aufgaben, Anwendungen



1. Auflage

Prof. Dr. Herbert Sager

Bibliografische Information
der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek
verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-7281-3393-9 (Printausgabe)
ISBN 978-3-7281-3687-9 (E-Book)
DOI 10.3218/3687-9

1. Auflage 2012

Der vdf im Internet:
www.vdf.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Symbole

j	Imaginäre Einheit	
t	Zeit	
ω	Kreisfrequenz	
$L^1(\mathbb{R})$	Lebesgue-Raum der absolut integrierbaren Funktionen mit Norm $\lVert f \rVert_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t) \rvert\, dt < \infty$	Seite 6
$L^2(\mathbb{R})$	Lebesgue-Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen	Seite 6
$\langle f(t),\, g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t)\, dt$	Skalarprodukt der Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$	Seite 6
$(f * g)(t)$	Faltung von $f,\ g \in L^2(\mathbb{R})$ oder $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$	Seite 57
$\mathcal{F} :\ f(t) \to F(\omega)$	bezeichnet die Fourier-Transformation	Seite 5
$\mathcal{F}^{-1}$	bezeichnet die inverse Fourier-Transformation	Seite 5
$f(t) \circ\!-\!\bullet\ \mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$	ein Fourier-Transformationspaar	Seite 5
$F^*(\omega)$	die komplex konjugierte von $F(\omega)$	Seite 6
$\mathcal{F}_C(f(t)) = F_C(\omega)$	Fourier Cosinus-Transformation	Seite 10
$\mathcal{F}_S(f(t)) = F_S(\omega)$	Fourier Sinus-Transformation	Seite 11
$\mathcal{D}$	Vektorraum der Testfunktionen	Seite 39
$p_d(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lvert t \rvert < d/2 \\ 0, & \lvert t \rvert > d/2 \end{cases}$	Rechteckimpuls	Seite 9
$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t \rvert}{T}, & \lvert t \rvert < T \\ 0, & \lvert t \rvert > T \end{cases}$	Dreiecksimpuls	Seite 20
$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	Heaviside-Funktion	Seite 47
$sign(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	Signum-Funktion	Seite 82
$\delta(t)$	Dirac-Distribution	Seite 41
$\delta_T(t)$	Impulszug	Seite 51

Geleitwort

Die Fourier-Transformation bildet die Grundlage von äusserst leistungsstarken numerischen Verfahren mit vielfältigsten Anwendungsgebieten, etwa in der Zeit-Frequenz-Analyse, Signalverarbeitung in Nachrichtentechnik, Audio- und Bildverarbeitung, Behandlung von Differenzialgleichungen zur Analyse nichtlinearer Systeme und viele mehr. Das vorliegende, nur rund 150 Seiten starke Buch richtet sich an Studierende von Fachhochschulen und technischen Universitäten. Die langjährige Unterrichtserfahrung des Autors widerspiegelt sich im jederzeit auf das unmittelbare Ziel fokussierten Vorgehen. So werden in vielen kleinen Schritten systematisch die Methoden und Techniken entwickelt, mit denen die Fourier-Transformation wirkungsvoll genutzt werden kann.

Auf moderaten Voraussetzungen in Analysis aufbauend, werden sämtliche Eigenschaften und Beziehungen hergeleitet und ab diesem Punkt konsequent eingesetzt. Dadurch ergibt sich eine Orientierung auf die unmittelbare Anwendung des soeben Erworbenen. Dieses Konzept bedingt, dass die Leserin, der Leser den logischen Aufbau des Buches beim Studium einhält. Alle Einzelschritte sind zwar klein und zudem ausführlich demonstriert. Sie müssen jedoch zum gewinnbringenden Verständnis ausnahmslos explizit durch-gearbeitet werden. Wer sich auf dieses Vorgehen einlässt, findet im vorliegenden Werk ein Buch, das sich nicht nur als Vorlesungsbegleiter, sondern auch für das Selbststudium hervorragend eignet.

Auch wenn der Autor im zweiten Kapitel von der „Trickkiste der Fourier-Transformation“ schreibt, so vermeidet er es doch, sich auf eine Zusammenstellung von rezeptartigen Formeln zu beschränken. Der Umgang mit Distributionen, ein didaktisch anspruchsvolles Gebiet, wird sehr verständlich eingeführt, ohne dabei die Exaktheit zu vernachlässigen. Kritische Punkte, welche den mit gewöhnlichen Funktionen vertrauten Studierenden Mühe bereiten können, werden klar benannt und ihre korrekte Anwendung und Umsetzung gezeigt, etwa in der Handhabung der Delta-Distribution $\delta(t)$ und ihrer Ableitung $\delta'(t)$.

Im weiteren Verlauf des Buches wird das bereits behandelte Material fortlaufend zur Lösung von Übungen eingesetzt, was eine gründliche Vertiefung des Verständnisses ermöglicht. Viele Übungen erfordern dadurch nur wenige Zeilen zur Lösung, wodurch die Studierenden die für die effiziente Anwendung der Fourier-Transformation notwendige Fähigkeit trainieren, auch umfangreiche Problemstellungen in eine Abfolge von kleinen Einzelschritten zu zerlegen, deren Teillösungen mithilfe von Standardmethoden („Rezepten“) schnell bestimmt werden. Das Buch beschränkt sich aber nicht darauf, diese Methoden aufzulisten, sondern liefert stringente Begründungen dafür. So absorbieren die Studierenden nicht nur, wie die Methode funktioniert, sondern auch warum. Der Autor weist jeweils darauf hin, wenn Symmetrien oder andere spezielle Eigenschaften die Lösung eines Problems drastisch vereinfachen. So erschliessen sich den Studierenden allmählich die Denkweisen, auf denen die Leistungsfähigkeit der Fourier-Transformation beruht. Sind diese Verfahren einmal bekannt und durch Übungen gut verankert, werden sie automatisch zum Handwerkszeug des angehenden Ingenieurs. Das Buch behält seine Relevanz über das erste Studium hinaus: Ein erster Tabellenanhang mit den Formeln und Beziehungen eignet sich sowohl als Formelsammlung, wie – dank der Querverweise zum Haupttext – auch zur Begründung und Herleitung dieser Beziehungen. Besonders hilfreich ist zudem der zweite Anhang mit der Tabelle von Transformationspaaren, welche nebst den Funktionsgleichungen auch deren grafische Darstellung zeigt. Die ausführliche Illustration des Buches mit zahlreichen direkt in den Text eingefügten Diagrammen fördert die tiefere Verankerung des Stoffes durch dessen Verknüpfung mit grafischer Darstellung.

Prof. Dr. Thomas A. Heim
Leiter Mathematikzentrum
Fachhochschule Nordwestschweiz
IGN, Hochschule Technik
Steinackerstrasse 5
5210 Windisch

Vorwort

Oft wird „Fourier-Transformation“ mit F.T. abgekürzt.
Das vorliegende Buch entstand aus meiner langjährigen Unterrichtstätigkeit im Studiengang Elektro- und Informationstechnik der Fachhochschule Nordwestschweiz in Brugg-Windisch. Es ist gedacht für Studierende von Fachhochschulen und Technischen Universitäten, die die F.T. verstehen und anwenden wollen in Gebieten wie Signal- und Systemanalyse, Zeit-Frequenz-Analyse, FFT. Es zeichnet sich aus durch einen systematischen Aufbau und ist gegliedert in viele, innerhalb eines Kapitels fortlaufend nummerierte, kleine Schritte, die alle knapp und übersichtlich dargestellt und hergeleitet sind. Das ermöglicht auch ein präzises Referenzieren. So wird im späteren Text mit (2.6) Bezug genommen auf „Beziehung 2.6“, im Kapitel 2 etc. Die vielen Beispiele und Aufgaben sind alle vollständig gelöst. Deshalb eignet sich das Buch für das Selbststudium oder auch als Begleittext für ein Modul über Integraltransformationen.
Der Dirac Delta-Impuls $\delta(t)$, mit seinen verschiedenen Gesichtern, spielt in der F.T. eine zentrale Rolle. Ich habe besondere Sorgfalt darauf verwendet, $\delta(t)$ zu begründen – Brigola [2] hat mich hier inspiriert – und seine zentralen Eigenschaften herzuleiten. Begriffe wie Testfunktion, Distribution und ihre Ableitungen werden soweit behandelt, wie sie für die F.T. notwendig sind und so, dass Resultate, die vor den Kopf stossen können, wie $f(t)\cdot\delta(t) = f(0)\cdot\delta(t)$ geklärt werden.
Der letzte Abschnitt in jedem Kapitel enthält viele Aufgaben, die alle im Detail gelöst sind. Es sind zuerst Übungsaufgaben, dann solche aus Klausuren und – in den Kapiteln 3 und 4 – Modulschlussprüfungsaufgaben. Das erweist sich als sehr wertvoll im Lernprozess.
Das Buch ist in fünf Kapitel gegliedert und enthält am Schluss zwei Tabellen: eine beinhaltet die wichtigsten Formeln, und die zweite stellt in Formeln und Bildern Funktionen und ihre Fourier-Transformierten gegenüber. Alle dargestellten Fourier-Transformationspaare sind im Text hergeleitet worden.

Kapitel 1 bespricht zuerst den Übergang von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation. Dann geht es um die Symmetrie-Eigenschaften, wenn das Signal reellwertig ist oder sogar gerade/ungerade. Im 4. Abschnitt werden die üblichen Transformationseigenschaften zusammengestellt, mit vielen Bildern und Beispielen. Zuletzt Aufgaben mit Lösungen.

Kapitel 2 führt den Delta-Impuls ein und gibt dann eine Herleitung der Eigenschaften von $\delta(t)$, wie sie in den späteren Kapiteln gebraucht werden. Der Impulszug $\delta_T(t)$ wird besprochen. Am Schluss, Aufgaben mit Lösungen.

Kapitel 3 enthält die Faltungssätze im Zeit- und im Frequenzbereich. Das Skalarprodukt im Frequenzbereich ist proportional dem Skalarprodukt im Zeitbereich. Diese grundlegende Beziehung führt zum Satz von Parseval und zum Energiedichte-Spektrum, welches mit der Autokorrelationsfunktion zusammenhängt. Aufgaben mit Lösungen zum Schluss.

Im Kapitel 4 werden spezielle Funktionen Fourier-transformiert, $\delta(t)$, $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, Heaviside- und Signum-Funktion, periodische Funktionen und nochmals der Impulszug $\delta_T(t)$, jeweils mit vielen Beispielen und Bildern. Was geschieht, wenn man $\delta_T(t)$ mit einer Funktion faltet oder multipliziert? Das ist für die diskrete F.T. von grosser Bedeutung. Am Schluss wieder viele Aufgaben mit Lösungen.

Kapitel 5 gibt eine Herleitung der diskreten F.T.

Am Anfang meiner Lehrtätigkeit habe ich viel gelernt aus dem Buch von H. P. Hsu [5], das seit Langem vergriffen ist. Es hat hier seine Spuren hinterlassen.

Folgende Themen werden nicht behandelt.
- Fourier-Transformation von Funktionen mit mehreren Variablen, siehe dazu etwa http://see.stanford.edu/materials/lsoftaee261/chap8.pdf
- F.T. zur Lösung von Differenzialgleichungen, siehe dazu etwa [11].

Die Fourier-Transformation wird bei uns im 4. Semester unterrichtet, nachdem die Studierenden die Module Analysis 1, 2 und 3 bestanden haben. Für alle Prüfungen standen ihnen stets das Skript sowie die zwei Tabellen zur Verfügung.

Für Hinweise und Anregungen des Lesers bin ich jederzeit sehr dankbar, herbert.sager@fhnw.ch oder herbert.sager@yetnet.ch.

Windisch, Februar 2012 Herbert Sager

n|w Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

1 Fourier-Integral und kontinuierliches Spektrum

Mit der Fourier-Reihe haben wir das Spektrum (Fourier-Koeffizienten) einer periodischen Funktion. In vielen praktischen Anwendungen sind aber die Funktionen nicht periodisch. Dann wird die Spektralanalyse mit der Fourier-Transformation (F.T.) gemacht. Beim Übergang von periodischen zu nicht periodischen Funktionen muss aber der Begriff des Spektrums durch die spektrale Dichte ersetzt werden, (Abschnitt 1.1).
Unsere Signale sind meistens reellwertig. Was bedeutet das für die Fourier-Transformierten? Und wenn sie zusätzlich gerade/ungerade sind, wie äussert sich das im Frequenzbereich, (Abschnitt 1.2)? Im Abschnitt 1.3 werden die Fourier Sinus/Cosinus-Transformationen besprochen. Wie hängen sie zusammen mit der Fourier-Transformation? Im Abschnitt 1.4 sind die üblichen Transformationseigenschaften zusammengestellt mit vielen Bildern und Beispielen. Viele Aufgaben mit Lösungen sind dann im Abschnitt 1.5.

1.1 Von der Fourier-Reihe zum Fourier-Integral

Wenn eine T-periodische Funktion f stückweise stetig ist und auch ihre Ableitung f' stückweise stetig ist, dann hat f eine Fourier-Reihe, die gegen f konvergiert.

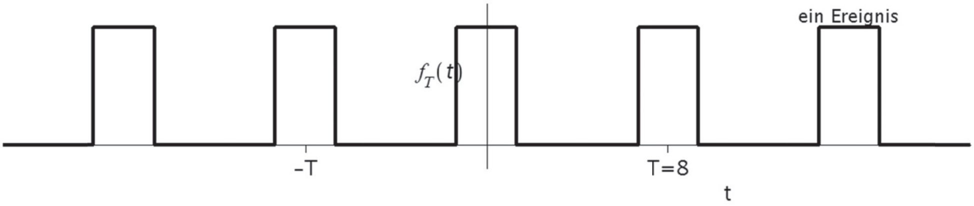
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t},$$

wobei $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ die Grundfrequenz ist.

Die Absolutbeträge $|c_n|$ und die Phasen-Winkel ϕ_n der komplexen Fourier-Koeffizienten $c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot \phi_n}$, in Abhängigkeit der Kreisfrequenz $\omega = n \cdot \omega_0$, stellen das *Amplitudenspektrum* resp. das *Phasenspektrum* der periodischen Funktion f dar.
Da der Index n eine ganze Zahl ist, so werden die Amplituden- und Phasenspektren nicht durch stetige Kurven dargestellt, sondern sie treten nur an den diskreten Punkten $\omega = n \cdot \omega_0$ auf. Man nennt sie deshalb *diskrete Spektren* oder *Linienspektren*.
Mit den diskreten Amplituden- und Phasenspektren hat eine periodische Funktion f ihre Darstellung im Frequenzbereich. Man kann f also sowohl im Zeitbereich wie auch im Frequenzbereich betrachten.

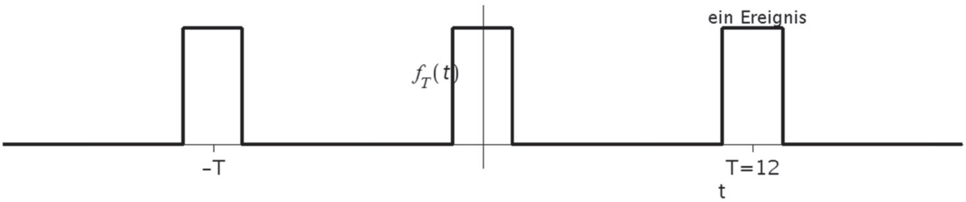
Beispiel 1.1 Wenn wir von einer periodischen Funktion $f_T(t)$ ausgehen mit Periode T, und dann $T \to \infty$ streben lassen, dann ist die Grenzfunktion $f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t)$ nicht mehr periodisch. Illustriere diesen Prozess anhand von Rechteckimpulsen.

$T = 8$



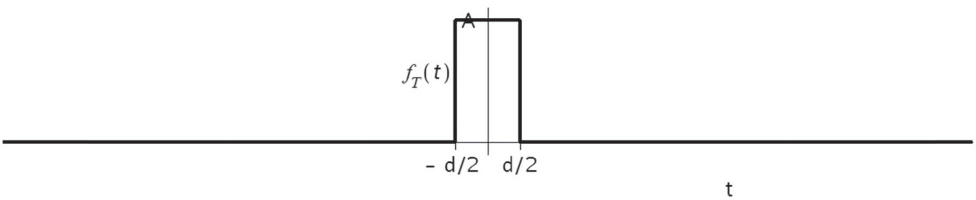
Figur 1.1

$T = 12$



Figur 1.2

$T = \infty$

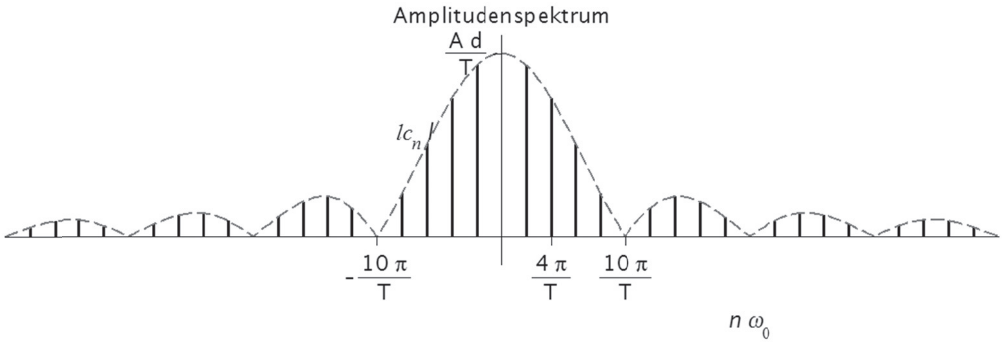


Figur 1.3

$f(t) = \lim\limits_{T \to \infty} f_T(t)$ ist nicht mehr periodisch.

Beispiel 1.2 Welche Veränderungen bringt die Verlängerung der Periode T mit sich für das Spektrum einer periodischen Funktion? Illustriere anhand von Rechteck-impulsen.

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} A \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}\, dt = \frac{dA}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\omega_0 \frac{d}{2}\right)}{n\omega_0 \frac{d}{2}}$$



Figur 1.4: Amplitudenspektrum $|c_n|$

Aus dem Graph des Amplitudenspektrums entnehmen wir, dass die Frequenznadeln $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ auseinander liegen. Wächst nun T, so wird die Grundfrequenz ω_0 kleiner und die Frequenznadeln des Spektrums rücken näher zusammen. Zudem wird die Amplitude $\frac{dA}{T}$ kleiner. Im Grenzfall ($T \to \infty$) ergibt sich aus dem Linienspektrum ein kontinuierliches Spektrum, das jedoch längs der ganzen Frequenzachse verschwindende Werte annimmt.

Dass $c_n \xrightarrow[\infty]{T} 0$, sehen wir allgemein aus folgender Energiebetrachtung. Wir gehen von Signalen $f(t)$ aus mit endlicher Energie $E_n < \infty$. Die mittlere Leistung in einem Intervall der Länge T ist:

$$P_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \left(f(t)\right)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{(Satz von Parseval).}$$

Die in diesem Intervall umgesetzte Energie ist $E_n = T \cdot P_n$. Nun ist nach dem Satz von Parseval:

$$E_n = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 .$$

Wenn $T \to \infty$, so bleibt $E_n < \infty$. Also folgt $\lim_{T\to\infty} T \cdot \sum_n |c_n|^2 < \infty$, und daher muss jedes

$$|c_n| \xrightarrow[\infty]{T} 0 .$$

Beispiel 1.3 Es sei $f_T(t)$ eine T-periodische Funktion. Wenn $T \to \infty$, so wird $\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t)$ nicht periodisch.

Gesucht: Die Fourier-Darstellung dieser nicht periodischen Funktion.

Es sei T gross, aber endlich. Dann ist $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ klein. Wir setzen $\omega_0 = \Delta\omega$, mit $\lim_{T\to\infty} \Delta\omega = 0$.
Die Frequenz irgendeiner Harmonischen $n \cdot \omega_0 = n \cdot \Delta\omega$ (ganz kleine Schritte) entspricht bei