

C
A

COLECCIÓN
ACADÉMICA

EAFIT

Álgebra lineal

Orlando García Jaimes
Jairo A. Villegas Gutiérrez
Jorge Iván Castaño Bedoya

ESCUELA DE
CIENCIAS Y
HUMANIDADES



Álgebra lineal

Orlando García Jaimes
Jairo A. Villegas Gutiérrez
Jorge Iván Castaño Bedoya



García Jaimes, Orlando

Álgebra lineal / Orlando García Jaimes, Jairo Alberto Villegas Gutiérrez, Jorge Iván Castaño Bedoya. -- Medellín : Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2012.
520 p. ; 24 cm. -- (Colección académica)

1. Álgebras lineales. 2. Matrices (Matemáticas). 3. Espacios vectoriales.

I. Villegas Gutiérrez, Jairo Alberto. II. Castaño Bedoya, Jorge Iván. III. Tít. IV. Serie
512.5 cd 21 ed.

G216

Universidad EAFIT-Centro Cultural Biblioteca Luis Echavarría Villegas

Álgebra lineal

Primera edición: noviembre de 2012

© Orlando García Jaimes

© Jairo A. Villegas Gutiérrez

© Jorge Iván Castaño Bedoya

© Fondo Editorial Universidad EAFIT

Cra. 48A No. 10 sur - 107. Tel. 261 95 23

www.eafit.edu.co/fondoeditorial

Correo electrónico: fonedit@eafit.edu.co

Imagen de carátula: *Epcot Polygons*, subido por: turbidity,
disponible en: www.sxc.hu, consulta: 7 de noviembre del 2012

Editado en Medellín, Colombia

Contenido

1. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales	11
1.1. Introducción	11
1.2. Matrices	14
1.2.1. Algunos tipos de matrices	15
1.3. Operaciones con matrices	17
1.4. Multiplicación de matrices	21
1.5. Transpuesta de una matriz	26
1.6. Sistemas de ecuaciones lineales	34
1.7. Forma matricial de un sistema	36
1.8. Sistemas equivalentes	38
1.9. Matrices invertibles	60
1.10. Ejercicios resueltos	75
1.11. Ejercicios propuestos capítulo 1	91
2. Determinantes	101
2.1. Introducción	101
2.2. Determinante de una matriz	102
2.3. Propiedades de los determinantes	108
2.4. Cálculo de determinantes por cofactores	122
2.5. Adjuntas e inversas	126
2.6. Regla de Cramer	130
2.7. Ejercicios resueltos	133
2.8. Ejercicios propuestos capítulo 2	152
3. Espacios vectoriales	159
3.1. Introducción	159

2 Álgebra lineal

3.2. Espacios vectoriales	160
3.3. Subespacios vectoriales	174
3.4. Bases de un espacio vectorial	182
3.5. Dimensión de un espacio vectorial	192
3.6. Ejercicios resueltos	202
3.7. Ejercicios propuestos capítulo 3	221

4. Producto escalar 225

4.1. Introducción	225
4.2. Producto escalar	226
4.3. Proyección ortogonal	242
4.4. Producto escalar respecto a una base	249
4.5. Lugares geométricos	254
4.5.1. Rectas en el plano	254
4.5.2. Ángulo entre dos rectas	255
4.5.3. Planos	258
4.5.4. Circunferencia y superficie esférica	262
4.5.5. Intersección entre circunferencia y recta	267
4.5.6. Superficie cónica	270
4.6. Cálculo de distancias	272
4.6.1. Distancia de un punto a una recta	273
4.6.2. Distancia de un punto a un plano	276
4.7. Bases ortonormales	282
4.8. Ejercicios propuestos capítulo 4	290

5. Producto vectorial 295

5.1. Introducción	295
5.2. Producto vectorial	296
5.3. Aplicaciones del producto vectorial	308
5.3.1. Ecuación del plano	308
5.3.2. Distancia entre dos rectas	311
5.3.3. Área de un triángulo	317
5.4. Triple producto escalar	322
5.5. Momento producido por una fuerza	327
5.6. Ejercicios propuestos capítulo 5	341

6. Transformaciones lineales	345
6.1. Introducción	345
6.2. Transformaciones lineales	346
6.3. Propiedades de las transformaciones lineales	354
6.4. Rango y núcleo	360
6.5. Transformaciones lineales inyectivas	364
6.6. Isomorfismos	370
6.7. Forma matricial de una transformación lineal	374
6.8. Cambio de coordenadas	379
6.9. Matriz que representa una transformación	382
6.10. Álgebra de las transformaciones lineales	386
6.11. Transformaciones lineales invertibles	393
6.12. Ejercicios resueltos	399
6.13. Ejercicios propuestos capítulo 6	416
7. Valores y vectores propios	421
7.1. Introducción	421
7.2. Valores y vectores propios de una matriz	422
7.3. Diagonalización	435
7.4. Diagonalización de matrices simétricas	443
7.5. Formas cuadráticas	461
7.5.1. Ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	471
7.6. Ejercicios propuestos capítulo 7	488
A. Respuesta de los ejercicios seleccionados	493
A.1. Ejercicios propuestos capítulo 1, página 91	493
A.2. Ejercicios propuestos capítulo 2, página 152	497
A.3. Ejercicios propuestos capítulo 3, página 221	499
A.4. Ejercicios propuestos capítulo 4, página 290	501
A.5. Ejercicios propuestos capítulo 5, página 341	503
A.6. Ejercicios propuestos capítulo 6, página 416	505
A.7. Ejercicios propuestos capítulo 7, página 488	506
Bibliografía	509
Índice alfabético	511

Índice de figuras

1.1.	Introducción de matrices con DERIVE	30
1.2.	Pantalla para matrices 2×3 con DERIVE	31
1.3.	Pantalla para insertar el número de ecuaciones en DERIVE	46
1.4.	Pantalla para introducir ecuaciones en DERIVE . . .	47
2.1.	Inversiones de una permutación ($n = 6$)	105
2.2.	Cálculo de $\det A$, si A es de tamaño 3×3	107
2.3.	Cálculo de los cofactores de una matriz	148
2.4.	Cálculo de la adjunta de una matriz	149
2.5.	Área del triángulo con vértices en A , B y C	150
3.1.	Combinación lineal de los vectores $(1, -1)$ y $(1, 2)$.	177
3.2.	Combinación lineal de dos vectores	178
3.3.	Subespacio generado por el vector $(3, 4)$	179
3.4.	Bases para $\mathbb{R}^2$	189
3.5.	Tres vectores libres determinan una base para $\mathbb{R}^3$.	202
4.1.	Prueba del axioma $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ para el producto escalar	238
4.2.	Ley distributiva para el producto escalar	239
4.3.	Teorema del coseno	241
4.4.	Teorema de Pitágoras	241
4.5.	Paralelogramo con diagonales ortogonales	242
4.6.	Proyección ortogonal	243
4.7.	Diagonales de un rombo	245
4.8.	Ángulo inscrito en media circunferencia	246

6 Álgebra lineal

4.9. Ortocentro de un triángulo	247
4.10. Ángulo de la diagonal de un cubo	252
4.11. Cosenos directores de un vector	254
4.12. Ecuación de una recta en el plano	255
4.13. Ángulo entre dos rectas de un mismo plano	257
4.14. Plano normal al vector $\vec{n}$ y que pasa por A	258
4.15. Ángulo entre dos planos	260
4.16. Superficie esférica de radio ρ y centro C	263
4.17. Tangentes a una circunferencia	264
4.18. Intersección entre una circunferencia y una recta	267
4.19. Intersección de una recta y una circunferencia	270
4.20. Superficie cónica	271
4.21. Distancia de un punto a una recta	273
4.22. Área de un triángulo cualquiera	275
4.23. Distancia del punto P_0 al plano Π	276
4.24. Proceso de Gram-Schmidt	287
4.25. Vector ortogonal a otros dos	288
5.1. Sentidos positivo y negativo del producto vectorial	297
5.2. Invarianza del producto vectorial	298
5.3. Distributividad para vectores en el mismo plano	299
5.4. Distributividad para $\mathbf{v}_1$ perpendicular a $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$	300
5.5. Ley distributiva, caso general	301
5.6. Plano que pasa por un punto A y es paralelo a dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$	309
5.7. Distancia entre rectas cruzadas en el espacio	315
5.8. Área de un triángulo	317
5.9. Área de una poligonal convexa	319
5.10. Área del polígono convexo del ejercicio 5.3.5	321
5.11. Determinante de un matriz 3×3	324
5.12. Volumen del paralelepípedo	325
5.13. Fuerzas equivalentes	328
5.14. Momento de una fuerza	328
5.15. Momento de una fuerza respecto al origen	329
5.16. Momento respecto a un punto arbitrario	330
5.17. Teorema de Varignon	332

5.18. Momento producido por un par	334
5.19. Área de la región poligonal convexa	342
6.1. Rotación del punto $v = (x, y)$ un ángulo θ	348
6.2. Rotación de $u + v$ un ángulo θ	349
6.3. Rotación de αv un ángulo θ	350
6.4. Rotación de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ un ángulo θ .	350
6.5. Reflexión del vector (x, y) alrededor de $y = x$	352
6.6. Composición de isomorfismos	373
7.1. Efecto del cambio de base en una transformación .	449
7.2. Efecto del cambio de base en un endomorfismo . . .	450
7.3. Cambio de base en un endomorfismo en $\mathbb{R}^2$	452
7.4. Gráfica de la sección cónica del ejercicio 7.5.3 . . .	477
7.5. Gráfica de la sección cónica del ejercicio 7.5.4 . . .	479
7.6. Gráfica de la sección cónica del ejercicio 7.5.5 . . .	480

Índice de tablas

1.1.	Pesos de las materias por departamento	21
1.2.	Calificaciones por aspirante	22
2.1.	Determinante de una matriz 3×3	107
2.2.	Determinante de la matriz A dada	108
5.1.	Área de una poligonal convexa	321
5.2.	Área del polígono convexo del ejercicio 5.3.5	322
6.1.	Datos del ejemplo 6.3.2	358
6.2.	Cantidades de material por tipo de parte	359
7.1.	Clasificación de las cónicas según su inercia	474
7.2.	Clasificación de las superficies cuadráticas por su inercia	483
7.3.	Ecuaciones canónicas de las superficies cuadráticas	485

Capítulo 1

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1.1 Introducción

Desde el punto de vista lógico, un curso de Álgebra Lineal debería iniciarse con el concepto de *espacio vectorial*, presentar luego las transformaciones lineales entre espacios vectoriales y la cuestión de las matrices, y a partir de esto atacar el problema de los sistemas de ecuaciones. Sin embargo, desde el punto de vista pedagógico, resulta más productivo introducir al estudiante en los conceptos del Álgebra Lineal comenzando con los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, con los cuales él ya está un poco más familiarizado.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, las matrices constituyen una poderosa herramienta para la formulación de algoritmos de solución. Además, ellas nos permiten expresar de forma simple gran variedad de problemas relacionados con procesos de información, introducción de sistemas lineales en un computador, etc. En el campo del álgebra lineal y sus temas afines, las matrices constituyen una herramienta fundamental.

Históricamente, la referencia a problemas algebraicos aparece en épocas muy remotas. Ya en las civilizaciones de la antigua

Mesopotamia se muestran algunos problemas matemáticos usando escritura cuneiforme.

Mejor suerte se ha tenido con los antiguos documentos egipcios, puesto que el descubrimiento de la piedra trilingüe de Roseta (griego, demótico y jeroglífico) en 1779, en el transcurso de una de las expediciones napoleónicas, ha permitido descifrar gran parte de documentos e inscripciones egipcias. Uno de los más importantes, con carácter matemático, que se ha encontrado es el denominado papiro Rhind o papiro de Ahmes. Este es un rollo de papiro de 30 cm de ancho por 6 m de largo, que fue comprado en 1858 por el coleccionista de antigüedades escocés Henry Rhind. Ahmes, el escriba que transcribió originalmente el papiro alrededor del 1650 a. C., explica que el material es una copia de otro manuscrito que data de entre los años 2000 y 1800 a. C. y que es muy probable que sean conocimientos que provengan de Imhotep, arquitecto y médico del faraón Zoser.

En el papiro Rhind hallamos una gran variedad de problemas matemáticos, que van desde representaciones para los números hasta problemas geométricos y de razones trigonométricas. En el caso del álgebra, aparecen problemas en los cuales se plantea la solución de una ecuación lineal de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. Es necesario aclarar que ellos no emplearon este tipo de escritura; para representar las incógnitas usaban la expresión “aha” o montón, y con esta terminología nos encontramos con problemas como este: “Calcular el montón si el montón y un séptimo del montón son 19”.

Por otro lado, los chinos también se plantearon el problema de resolver sistemas lineales. En el texto *Nueve capítulos de arte matemático*, escrito durante la dinastía Han alrededor de los años 200 a. C., nos encontramos con el siguiente problema: “Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?”.

Usando la notación actual para las ecuaciones, tenemos un

sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: x , y y z , que puede escribirse en la forma

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26.$$

En cuanto a la solución, lo que se propone es escribir las ecuaciones en un tablero de la forma

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Para resolver el sistema de ecuaciones, el autor de los *Nueve capítulos de arte matemático* explica el procedimiento en los siguientes términos:

1. Multiplique la columna dos por tres y la columna tres por dos; reste la nueva columna tres a la columna dos, generando una nueva columna dos. Luego, multiplique la columna uno por tres y quítele la columna tres, generando una nueva columna uno. De esta forma se obtiene el siguiente tablero:

0	2	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

2. Multiplique la columna uno por cinco y la columna dos por cuatro; reste la nueva columna dos a la columna uno, obteniendo una nueva columna uno. El tablero quedará finalmente de la siguiente forma:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

En este tablero, la primera columna permite calcular el valor de z . Usando este valor y la segunda columna se puede calcular y . Por último, con estos valores y la ecuación correspondiente a la tercera columna, se puede determinar el valor de x . Este procedimiento constituye un antecesor chino del método de eliminación de Gauss.

Entre los métodos que se conocen para resolver sistemas de ecuaciones lineales, es curioso que lo que hoy conocemos como método de Cramer para un sistema de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

fuese presentado por primera vez en la forma

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad y = \frac{af - dc}{ae - bd}$$

por Colin Maclaurin en 1729, en el texto *Treatise of Algebra*, que se pretendía fuese una introducción al libro de Isaac Newton *Arithmetica universalis*. El libro de Colin Maclaurin se publicó en el año 1748, dos años antes de que viera la luz el texto de Gabriel Cramer sobre líneas algebraicas, en el que aparecen las mencionadas fórmulas (Boyer, 2001: 540-542).

1.2 Matrices

Definición 1.2.1. Una matriz A es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, distribuidos en m filas y n columnas, y que denotamos con $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

En este caso decimos que A es una matriz de orden $m \times n$.

En el elemento a_{ij} de dicho arreglo, el subíndice i señala la fila a la que aquel elemento pertenece, mientras que el subíndice j señala la columna a la que pertenece el elemento. Por otro lado, al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas, con elementos en el conjunto de los números reales, lo denotamos con $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. En el caso en el cual $m = n$, decimos que la matriz es *cuadrada*.

Ejemplo 1.2.1. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

A es una matriz de orden 2×3 , mientras que B es una matriz de orden 3×3 . Además, $a_{23} = -4$ y $b_{13} = 2$.

1.2.1 Algunos tipos de matrices

En esta sección establecemos algunos tipos especiales de matrices que aparecen en un primer curso de Álgebra Lineal y que por su estructura y propiedades cumplen un papel importante en la teoría.

Matriz diagonal. Sea $A \in M_{n \times n}$; se dice que A es diagonal si y solo si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$.

Ejemplo 1.2.2. La matriz A , dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

es una matriz diagonal.

Matriz identidad. Sea $A \in M_{n \times n}$; se dice que A es la matriz identidad si y solo si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ y $a_{ij} = 1$ cuando $i = j$. La matriz identidad se suele representar mediante la expresión I_n .

Ejemplo 1.2.3. La matriz

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad de orden 3×3 .

Matriz escalar. Sea $A \in M_{n \times n}$; se dice que A es una matriz escalar si para cada elemento a_{ij} se cumple que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ k, & i = j. \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.4. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz escalar. Toda matriz escalar es diagonal, pero no toda matriz diagonal es escalar.

Matriz nula. Sea $A \in M_{m \times n}$; se dice que A es la matriz nula si $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1, \dots, n$. Esta matriz se denota con 0 .

Ejemplo 1.2.5. La matriz

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz nula de orden 3×3 .

Matriz triangular superior. Sea $A \in M_{n \times n}$; se dice que A es triangular superior si $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$. Si A es un matriz de este tipo, los elementos bajo la diagonal son nulos.

Ejemplo 1.2.6. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular superior.

Matriz triangular inferior. Sea $A \in M_{n \times n}$; se dice que A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$. Si A es un matriz de este tipo, los elementos sobre la diagonal son nulos.

Ejemplo 1.2.7. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular inferior.

1.3 Operaciones con matrices

Esta sección la dedicamos a definir y estudiar distintos tipos de operaciones con matrices. Realizamos la suma de matrices del mismo orden, sumando los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices; además, el producto de una matriz por un escalar corresponde a la multiplicación de cada uno de los elementos de la matriz por dicho escalar.

Definición 1.3.1. Dadas las matrices $A \in M_{m \times n}$ y $B \in M_{m \times n}$, su suma, que denotamos con $A + B$, es una matriz $M_{m \times n}$, cuyos elementos se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

es decir, la suma de matrices se puede ver como una función

$$\begin{aligned} + &: M_{m \times n} \times M_{m \times n} \longrightarrow M_{m \times n} \\ (A, B) &\longrightarrow A + B. \end{aligned}$$

Definición 1.3.2. Llamamos producto de un escalar λ por una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a la nueva matriz dada por

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix};$$

es decir, el producto de una matriz por un escalar se puede ver como una función

$$\begin{aligned} \cdot &: \mathbb{R} \times M_{m \times n} \longrightarrow M_{m \times n} \\ (\lambda, A) &\longrightarrow \lambda A. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -2A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sean las matrices A , B y C en $M_{m \times n}$. La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

1. $A + B$ es una matriz en $M_{m \times n}$ (Cerradura).
2. $A + B = B + A$ (Conmutativa).
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Asociativa).
4. $A + 0 = A$ para toda matriz $A \in M_{m \times n}$ (Elemento neutro).
5. En $M_{m \times n}$ se define $-A = (-a_{ij})$. A esta matriz se le llama *matriz opuesta* de A y cumple que para cada $A \in M_{m \times n}$, $A + (-A) = 0$.

Sean las matrices A y B en $M_{m \times n}$ y α y β dos escalares; el producto de una matriz por un escalar cumple las siguientes propiedades:

1. αA es una matriz en $M_{m \times n}$ (Cerradura).
2. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (Asociativa).
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Distributiva).
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (Distributiva).
5. $1A = A$ (Elemento neutro del producto por escalar).

Demostración. Vamos a probar el tercer numeral del primer grupo de propiedades. Sean las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ en $M_{m \times n}$; entonces:

$$\begin{aligned}
 A + (B + C) &= (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})] \\
 &= (a_{ij}) + [b_{ij} + c_{ij}] \\
 &= (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}]) \\
 &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] \\
 &= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) \\
 &= [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) \\
 &= (A + B) + C.
 \end{aligned}$$

Para el tercer numeral del segundo grupo de propiedades tenemos que para las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ en $M_{m \times n}$ y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha(A + B) &= \alpha[(a_{ij}) + (b_{ij})] \\
 &= \alpha(a_{ij} + b_{ij}) \\
 &= [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] \\
 &= [(\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij})] \\
 &= [(\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij})] \\
 &= (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij}) \\
 &= \alpha(a_{ij}) + \alpha(b_{ij}) \\
 &= \alpha A + \alpha B.
 \end{aligned}$$

Las demás propiedades se demuestran de modo similar.

En general, un conjunto de objetos dotado de una operación binaria interna (suma) y de una operación binaria externa (producto por escalar), que cumplen las diez propiedades que hemos mencionado, constituye una estructura matemática conocida como *espacio vectorial*. Así, el conjunto de $M_{m \times n}$, dotado de las operaciones de suma y multiplicación de una matriz por un

escalar, es un *espacio vectorial*. En el capítulo 3 presentamos otros ejemplos de espacios vectoriales y generalizamos algunas propiedades comunes a ellos.

1.4 Multiplicación de matrices

En la sección anterior se expusieron las operaciones de suma y producto por escalar para las matrices. Como se mencionó al final de la sección, uno de los aspectos importantes de estas operaciones consiste en la posibilidad de pensar en estructuras algebraicas generales; ahora presentamos la noción de *producto de matrices* y mostramos que aun cuando no tiene el poder de generalización que proporcionan los espacios vectoriales, permite agrupar, dentro de un mismo concepto, gran número de problemas y aplicaciones.

Como una manera de justificar la operación de multiplicación de matrices, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.1. Una empresa requiere los servicios de tres empleados para ocupar las jefaturas de tres departamentos. A la convocatoria para dichos cargos se presentan cinco aspirantes. Para el proceso de selección se tiene en cuenta las calificaciones de los aspirantes en tres asignaturas: Cálculo, Álgebra y Administración. Además, cada departamento asigna a cada materia un determinado valor porcentual o peso.

Los pesos de las materias en cada departamento están dados en la Tabla 1.1.

	Depto. 1	Depto. 2	Depto. 3
Cálculo	0,6	0,4	0,3
Álgebra	0,3	0,3	0,4
Admón.	0,1	0,3	0,3

Tabla 1.1. Pesos de las materias por departamento

En la Tabla 1.2 aparecen las calificaciones de los aspirantes en cada materia.

	Cálculo	Álgebra	Admón.
Pedro	4,0	3,5	4,0
Juan	4,0	4,0	4,5
Luis	3,5	4,0	3,5
Roberto	4,0	3,5	3,5
María	3,5	4,0	4,0

Tabla 1.2. Calificaciones por aspirante

Determinar la calificación de cada aspirante por departamento.
¿Cuál es el aspirante mejor evaluado en cada departamento?

Solución

De acuerdo con la información suministrada en las tablas, podemos construir dos matrices A y B , cuyas filas y columnas representan los datos de cada tabla. Para establecer la calificación de un aspirante en un departamento se multiplican los datos de la fila de notas del aspirante por los datos de la columna de pesos del departamento y luego se suman estos productos. Así, por ejemplo, si queremos saber cuál es la calificación de Luis en el departamento 2, tomamos la tercera fila de la matriz A y la segunda columna de la matriz B y las combinamos en la forma:

$$\begin{bmatrix} 3,5 & 4,0 & 3,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix} = 3,5 \times 0,4 + 4,0 \times 0,3 + 3,5 \times 0,3 = 3,65.$$

De modo general, si queremos determinar la calificación del aspirante que ocupa la fila i de la matriz A en el departamento j , lo que debemos hacer es multiplicar la fila i de A por la columna j de B en la forma

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j},$$

donde los $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $j = 1, 2, 3$, lo que significa que debemos tener como resultado una matriz de cinco filas y tres columnas. Todos los resultados los podemos escribir así:

$$\begin{bmatrix} 4,0 & 3,5 & 4,0 \\ 4,0 & 4,0 & 4,5 \\ 3,5 & 4,0 & 3,5 \\ 4,0 & 3,5 & 3,5 \\ 3,5 & 4,0 & 4,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,85 & 3,85 & 3,80 \\ 4,05 & 4,15 & 4,15 \\ 3,65 & 3,65 & 3,70 \\ 3,80 & 3,70 & 3,65 \\ 3,70 & 3,80 & 3,85 \end{bmatrix}.$$

En la matriz del producto, el elemento c_{ij} representa la calificación del aspirante i en el departamento j . Según esto, Juan es el que obtiene la nota más alta en el primer departamento, mientras que la mejor calificación en los otros dos departamentos es también para Juan, como se indica en la matriz del producto.

Definición 1.4.1. Dadas las matrices $A \in M_{m \times n}$ y $B \in M_{n \times p}$, entonces el producto de A con B , que denotamos con AB , es una matriz $C \in M_{m \times p}$, dada por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1 \dots p$.

La definición anterior establece que el elemento que ocupa la posición i, j del producto AB es igual a la suma de los productos de las componentes que ocupan la misma posición en la fila i de A y la columna j de B .

Ejemplo 1.4.2. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix};$$

entonces:

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

donde los elementos c_{ij} están dados por las relaciones:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}. \end{aligned}$$

En el caso del producto BA la matriz resultante es de tamaño 3×3 , lo que permite ver que no se cumple la ley conmutativa.

Ejemplo 1.4.3. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

entonces:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} (-1)2 + 0(-1) & (-1)1 + 0(0) & (-1)1 + 0(2) & (-1)4 + 2(0) \\ (0)2 + 2(-1) & (0)1 + 2(0) & (0)1 + 2(1) & (0)4 + 2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es importante recalcar que el producto de matrices no es conmutativo, como puede notarse en el ejemplo 1.4.3:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, el producto BA no está definido. Lo anterior nos conduce a afirmar que para que el producto BA esté definido se requiere que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.

Como hemos dicho previamente, la suma de matrices posee las mismas propiedades que la suma de escalares. Para el producto de matrices las cosas son diferentes, es decir, algunas de las propiedades usuales del producto entre escalares no son válidas para la multiplicación de matrices. Veamos una lista de las propiedades del producto de matrices:

1. *Ley distributiva.* Si B y C son matrices de tamaño $m \times n$ y A es una matriz de tamaño $r \times m$, entonces $A(B+C) = AB+AC$.
2. *Ley distributiva.* Si B y C son matrices de tamaño $m \times n$ y A es una matriz de tamaño $n \times r$, entonces $(B+C)A = BA+CA$.
3. Si α es un escalar y A es una matriz de tamaño $m \times n$ y B es una matriz de tamaño $n \times r$, entonces $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$.
4. Si A , B y C son matrices, entonces $A(BC) = (AB)C$, siempre y cuando el producto de estas matrices se pueda realizar.

Demostración. Vamos a efectuar la prueba de la primera propiedad, las demás se proponen como ejercicio para el lector. Notemos que $A(B+C)$ y $AB+AC$ son matrices de tamaño $r \times n$. Ahora, si llamamos $D = B+C$, $E = AD$, $F = AB$, $G = AC$ y $H = F+G$, entonces tenemos que demostrar que $E = H$.

Si $E = [e_{ij}]$ y $H = [h_{ij}]$, para probar que estas matrices son iguales, demostremos que $e_{ij} = h_{ij}$ para $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, n$. En efecto,

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}d_{kj};$$

pero al ser $d_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$, al reemplazar d_{kj} en la expresión e_{ij} ,

tenemos que

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{k=1}^m a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^m (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kj}. \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de las definiciones de H , F y G obtenemos que $h_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$, con lo cual

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj},$$

que es la misma expresión que hemos determinado para e_{ij} , mostrando entonces que $E = H$ y, por lo tanto, $A(B + C) = AB + AC$.

1.5 Transpuesta de una matriz

Definición 1.5.1. Dada una matriz de tamaño $m \times n$, la transpuesta de A , que denotamos con A^t , es la matriz de tamaño $n \times m$, cuyas columnas se forman a partir de las filas de A . Esto es, si $A = [a_{ij}]$, entonces $A^t = [a_{ji}]$.

Ejemplo 1.5.1. Para el caso de una matriz A de tamaño 3×3 , dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que los elementos de la diagonal son invariantes.