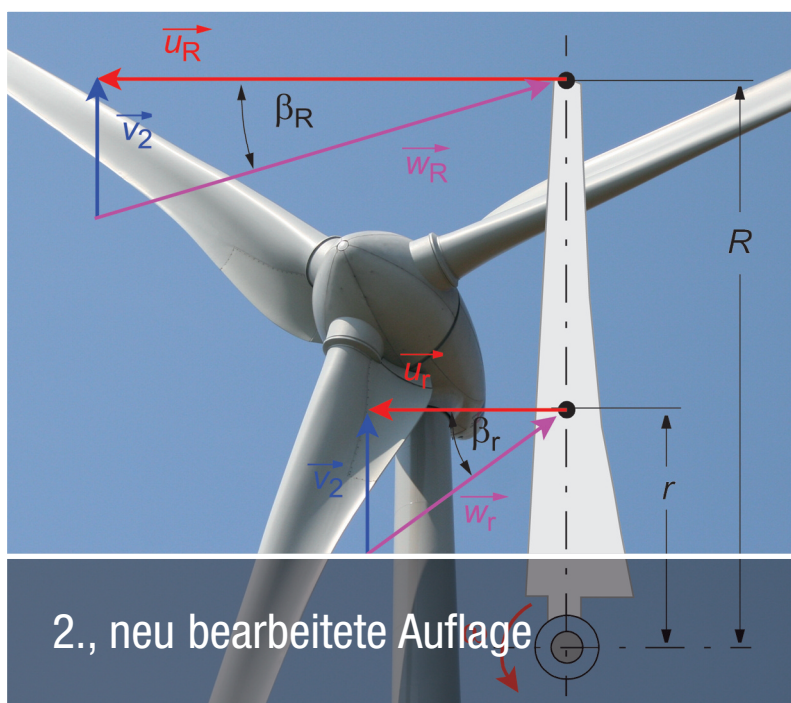


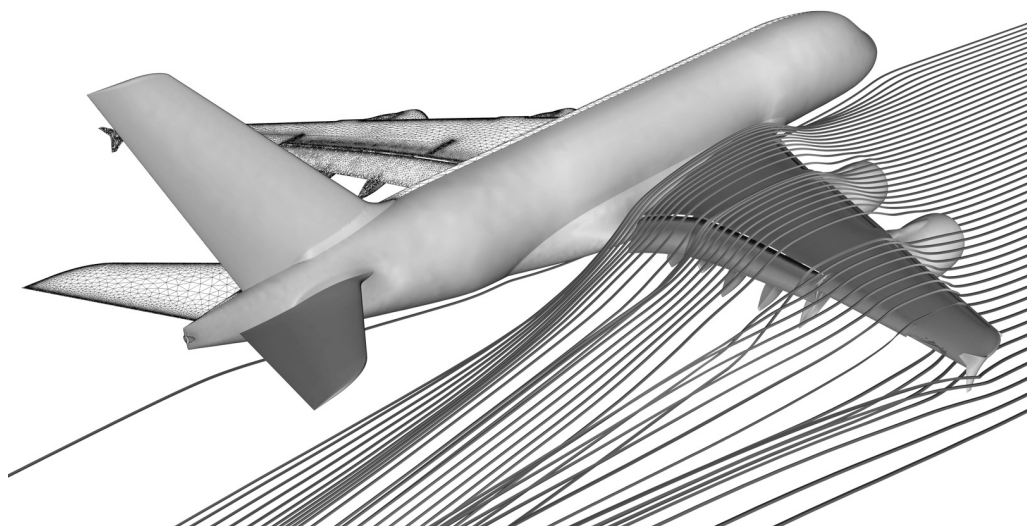
Gerd Junge

Einführung in die Technische Strömungslehre



HANSER

Gerd Junge
Einführung in die
Technische Strömungslehre



Gerd Junge

Einführung in die Technische Strömungslehre

2., neu bearbeitete Auflage

Mit 112 Abbildungen, 12 Tabellen
sowie 77 Übungsaufgaben



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autor:

Prof. Dr. rer. nat. Gerd Junge, Potsdam
Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44430-0

E-Book ISBN: 978-3-446-44541-3

Bild Seite 2: Copyright © 2010 Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2015 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Ute Eckardt

Herstellung: Katrin Wulst

Satz: abavo GmbH, Buchloe

Druck und Bindung: Friedrich Pustet, Regensburg

Printed in Germany

Vorwort

Dieses Buch wendet sich an Studierende der Technikwissenschaften im Grundstudium, aber auch an Ingenieure, die in ihrem Berufsleben bisher andere Fachgebiete verfolgt haben und sich nun in die Problematik der Strömungslehre einarbeiten möchten.

Der Text des Buches entstand aus Vorlesungsniederschriften für eine einsemestrige Lehrveranstaltung zur Einführung in die Strömungslehre. Über mehrere Jahre führten die Fragen und Anregungen der Studenten zu einer Darstellung, die den Lernzielen immer besser angepasst werden konnte.

Für die zweite Auflage wurden mit den Erfahrungen aus den Lehrveranstaltungen der letzten Jahre verschiedene inhaltliche Beschreibungen neu formuliert, um die Probleme besser verständlich zu erläutern.

Das Ziel besteht darin, den Zugang zur Literatur der technischen Strömungslehre und des Strömungsmaschinenbaus auf der Grundlage des physikalischen Allgemeinwissens zu erleichtern.

Aufbauend auf allgemein vorhandenem Grundwissen über Flüssigkeiten und Gase werden schrittweise die speziellen Eigenheiten von Strömungsvorgängen dargelegt und erläutert. Dabei wird großer Wert auf eine gut verständliche Problembeschreibung gelegt, die aus praktischen Beobachtungen nachvollzogen werden kann. Daraus werden plausible, physikalisch begründete Ansätze für eine mathematische Behandlung des jeweiligen Problems abgeleitet.

Bei den Herleitungen der Berechnungsvorschriften wird das Augenmerk besonders auf nachvollziehbare Erklärungen für die Art und die Abfolge der mathematischen Rechenschritte gerichtet.

Sekundär – sozusagen als Nebeneffekt – werden mit den vielfältigen Berechnungen Beispiele vermittelt, wie technische Probleme mit den Mitteln der Ingenieurmathematik behandelt werden können.

Die gewählte Darstellungsform fördert die Entwicklung einer nachhaltigen Wissensbasis, die im Wesentlichen ohne das Auswendiglernen von Formeln erreicht wird und die es gestattet, die Berechnungsmethoden in ihrer Anwendbarkeit und Zuverlässigkeit einzuschätzen.

Neben der Behandlung von Rohrströmungen werden die Bewegungsgleichungen für Strömungen und die Grundzüge der Potenzialtheorie für Strömungen dargelegt. Die wesentlichen strömungstechnischen Ansätze für das Verständnis und die optimale Auslegung von Strömungsmaschinen werden dargestellt.

Wegen der ausführlichen Analysen eignet sich das Buch auch gut als Hilfestellung bei vertiefenden Betrachtungen im Masterstudium und zum Nachschlagen im Berufsleben.

Dem Verlag möchte ich für die gute Zusammenarbeit bei der Entstehung des Buches danken. Das betrifft insbesondere Herrn Dipl. Phys. Jochen Horn, der mit vielen Hinweisen die Gestaltung des Buches wesentlich beeinflusst hat. Frau Dipl.-Min. Ute Eckardt hat mit großer Geduld meine zahlreichen Änderungswünsche in die zweite Auflage eingearbeitet und Frau Katrin Wulst sorgte für die ansprechende Gestaltung des Buches.

Potsdam, Mai 2015

Gerd Junge

Inhalt

Vorwort	5
1 Dichte, Druck und Kräfte	11
1.1 Dichte von Flüssigkeiten	11
1.2 Dichte von Gasen	13
1.3 Schweredruck in Flüssigkeiten	15
1.4 Dimension des Druckes	17
1.5 Kommunizierende Gefäße	17
1.6 Kräfte auf die Gefäßwände	18
1.7 Auftrieb (Archimedisches Prinzip)	19
1.8 Druck und Energie	21
1.9 Wandkräfte in Rohren	23
1.10 Luftdruck	25
1.11 Barometrische Höhenformel	26
1.12 Kamin	28
1.13 Übungsaufgaben	32
2 Idealisierte Strömung	33
2.1 Kontinuitätsgleichung	33
2.2 Bernoulli-Gleichung	34
2.3 Anwendungen	35
2.3.1 Hydrodynamisches Paradoxon	35
2.3.2 Venturi-Düse	35
2.3.3 Staurohr nach Prandtl	37
2.4 Rohrströmung aus einem Hochbehälter	38
2.4.1 Geschwindigkeit und Druckverlauf	38
2.4.2 Kavitation	39
2.5 Kavitation an Maschinenteilen	41
2.6 Energiegewinnung mit Fluiden	42
2.6.1 Nutzung der potentiellen Energie des Fluids	42
2.6.2 Nutzung der kinetischen Energie des Fluids	43
2.7 Gasströmung und Bernoulli-Gleichung	44
2.8 Übungsaufgaben	46
3 Reale Strömung	48
3.1 Newtons Reibungsgesetz	48
3.2 Viskosität von Gasen	49
3.3 Viskosität von Flüssigkeiten	51
3.4 Abweichungen vom Newton-Reibungsgesetz	52
3.5 Laminare und turbulente Strömungsformen	52
3.6 Reynolds-Zahl	56
3.7 Kinematische Viskosität	57

3.8	Übergang zur Turbulenz	58
3.9	Ähnlichkeit bei Strömungen	61
3.10	Übungsaufgaben	63
4	Rohrströmung	64
4.1	Druckverlust	64
4.2	Laminare Rohrströmung (Gesetz von Hagen-Poiseuille)	65
4.3	Turbulente Strömung	69
4.3.1	Druckverlust bei Vorgabe des Volumenstroms	70
4.3.2	Druckverlust bei Vorgabe der Druckdifferenz	73
4.4	Leistungsbedarf	75
4.5	Strömungen in Rohren von Solaranlagen	77
4.6	Druckverlust durch Einbauteile	78
4.7	Druckhöhe und Druckhöhenverlust	81
4.7.1	Druckhöhenverlust für waagerechte Rohrleitungen	81
4.7.2	Druckhöhenverlust bei Wasserkraftanlagen	82
4.8	Strömungswiderstand bei isothermer Gasströmung	86
4.9	Übungsaufgaben	92
5	Bewegungsgleichungen für Fluide	95
5.1	Lokale und konvektive Beschleunigungen	95
5.2	Druckkräfte	98
5.3	Euler-Gleichung	99
5.4	Zusammenhang mit der Gleichung von Bernoulli	100
5.5	Allgemeine Kontinuitätsgleichung	106
5.6	Impulssatz für Strömungen	109
5.7	Reaktionskraft	111
5.7.1	Kräfte auf die Rohrwand	112
5.7.2	Rückstoß	114
5.7.3	Rückstoß bei Torricelli-Ausströmung	115
5.7.4	Strahldruck auf eine Platte	116
5.7.5	Stoßverlust	117
5.8	Drall (Drehimpuls)	119
5.9	Übungsaufgaben	122
6	Strömungen kompressibler Fluide	124
6.1	Bernoulli-Gleichung für stationäre adiabatische Gasströmung	124
6.2	Schall und Schallgeschwindigkeit in Gasen	125
6.3	Strömungen durch eine konvergente Düse	128
6.4	Laval-Düse	133
6.5	Mach-Zahl	138
6.6	Geschwindigkeit und Düsenquerschnitt	139
6.7	Übungsaufgaben	141

7	Umströmung von Körpern	143
7.1	Grenzschicht	143
7.2	c_w -Wert	146
7.3	Laminare Umströmung	147
7.3.1	Sinken einer Kugel bei laminarer Umströmung	148
7.3.2	Entstaubung mit Wirbelsenke	149
7.4	Turbulente Umströmung	151
7.4.1	Sinken einer Kugel bei turbulenter Umströmung	153
7.4.2	Leistungsbedarf bei Bewegung im Fluid	154
7.5	Überschall-Umströmung	155
7.6	Widerstandsläufer	156
7.6.1	Schalenkreuz als Messgerät	156
7.6.2	Schalenkreuz als Antrieb	159
7.6.3	Tiefschlächtiges Wasserrad	160
7.7	Übungsaufgaben	162
8	Strömungsmaschinen	164
8.1	Funktionsprinzip von Strömungsmaschinen	164
8.2	Kreiselpumpe	166
8.3	Euler-Gleichungen für Strömungsmaschinen	168
8.4	Pelton-Turbine	170
8.5	Energie und Leistung bei freier Umströmung	175
8.5.1	Vereinfachter Propeller	175
8.5.2	Vereinfachte Windkraftanlage – Betz-Gesetz	177
8.6	Übungsaufgaben	181
9	Potenzialströmung	183
9.1	Strömungspotenzial	183
9.2	Ebene Parallelströmung	185
9.3	Zirkulation	185
9.4	Radialströmung	186
9.5	Zirkulationsströmung	188
9.6	Wirbelquelle (Radial- plus Zirkulationsströmung)	191
9.7	Dipolströmung (Quelle – Senke)	193
9.8	Virtuelle Doppelquelle	197
9.9	Reale Zylinderumströmung	198
9.10	Konforme Abbildung	201
9.10.1	Lineare Funktion $\zeta = az + b$	202
9.10.2	Inversion $\zeta = 1/z$	202
9.10.3	Logarithmus $\zeta = \text{Ln } z$	204
9.11	Anwendung: Halbkörper	205
9.12	Joukowski-Transformation	208
9.13	Strömungsvergleich Platte – Zylinder	211
9.14	Übungsaufgaben	214

10	Tragflügel	215
10.1	Magnus-Effekt	215
10.2	Schräg angeströmte Platte	219
10.3	Strömungskräfte auf eine kreisbogenförmige Platte	225
10.4	Tragflügel	227
10.4.1	Profile	227
10.4.2	Kennzahlen für Tragflügel	228
10.4.3	Kraftrichtungen am Tragflügel	230
10.4.4	Winkelverhältnisse am Tragflügel	231
10.4.5	Randeflüsse	233
10.5	Übungsaufgaben	236
11	Windkraftanlagen	238
11.1	Schnellaufzahl	238
11.2	Winkelbeziehungen am Rotor	240
11.3	Die Kräfte am Rotorblatt	242
11.4	Optimale Rotorblattausslegung	243
11.5	Biegemoment am Rotorblatt	245
11.6	Schubkraft auf die Rotorebene	246
11.7	Drehmoment an der Rotorwelle	248
11.8	Leistungsregelung	250
11.9	Übungsaufgaben	251
12	Lösungen	252
13	Literatur	309
	Quellenverzeichnis	309
	Weiterführende Literatur	309
	Sachwortverzeichnis	311
	Formelzeichen	318

1 Dichte, Druck und Kräfte

Die Begriffe Dichte und Druck sind in der Strömungslehre zentrale Größen. Sie sind nicht konstant, sondern hängen von äußeren Einflussgrößen wie Temperatur und Luftdruck ab. Mit dem Druck verbunden sind Kräfte, deren Auswirkungen auf Rohre und Wandungen berücksichtigt werden müssen. Im Zusammenhang mit Aufwindkraftwerken (**Thermikkraftwerken**) wird die Funktionsweise von Kaminen (Schornsteinen) zunehmend interessant.

1.1 Dichte von Flüssigkeiten

Die Massendichte ρ ist als Quotient aus Masse und Volumen definiert.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{mit} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1.1)$$

Das Volumen einer vorgegebenen Flüssigkeitsmenge ändert sich geringfügig, wenn ein allseitiger Druck p ausgeübt wird. Die druckbedingte relative Volumenänderung ist vom Material abhängig, sie wird mit dem Koeffizienten Kompressibilität κ beschrieben.

$$V = V_0 \cdot (1 - \kappa \cdot \Delta p) \quad (1.2)$$

Das Volumen ändert sich ebenfalls, wenn die Temperatur ϑ geändert wird. Die zugehörige Materialkonstante wird als Volumenausdehnungskoeffizient γ bezeichnet.

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta \vartheta) \quad (1.3)$$

Die Stoffkonstanten haben sehr kleine Zahlenwerte, sodass sich auch sehr geringe Dichteänderungen ergeben.

Die Tabelle zeigt für einige Flüssigkeiten die Zahlenwerte der Stoffkonstanten für normalen Luftdruck und 20 °C:

Tabelle 1.1 Stoffkonstanten einiger Flüssigkeiten nach [1.1]

Flüssigkeit	Dichte ρ in 10^3 kg/m^3	Kompressibilität κ in $1/\text{GPa}$	Vol.-Ausdehnung γ in $10^{-3}/\text{K}$
Wasser	0,998	0,47	0,21
Benzol	0,878	0,95	1,23
Ethanol	0,789	1,24	1,10
Glycerin	1,261	0,22	0,47

Die durch Druck und Temperatur veränderte Dichte berechnet sich nach

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{1}{(1 - \kappa \cdot \Delta p) \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta \vartheta)} \approx \rho_0 \cdot (1 + \kappa \cdot \Delta p - \gamma \cdot \Delta \vartheta) \quad (1.4)$$

Weil die Koeffizienten κ und γ sehr kleine Zahlenwerte aufweisen, kann die unhandliche Gleichung als Näherung vereinfacht werden. Die relative Dichteänderung berechnet sich in Abhängigkeit von Druck- und Temperaturänderungen in guter Näherung zu:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \kappa \cdot \Delta p - \gamma \cdot \Delta \vartheta \quad (1.5)$$

Beispiel:

Ethanol, Druckdifferenz 10 bar, Temperaturdifferenz 30 K: Die Dichte verringert sich um ca. 3,18 %, d. h., der Temperatureinfluss überwiegt.

Die Kompressibilität κ der Flüssigkeiten ist derart klein, dass für fast alle technischen Belange Flüssigkeiten als inkompressibel betrachtet werden können. Die Dichteänderung, die durch Druckänderung hervorgerufen wird, wird vernachlässigt.

Abweichend vom Verhalten anderer Flüssigkeiten ist beim Wasser die Dichteänderung infolge einer Temperaturänderung besonders ausgeprägt. Für höhere Ansprüche können Tabellenwerte herangezogen werden.

Tabelle 1.2 Dichte des Wassers bei normalem Luftdruck in Abhängigkeit von der Temperatur nach [1.2]

Temperatur in °C	10	20	30	40	50	60	70	80
Dichte in kg/m ³	999,70	998,20	995,64	992,21	988,03	983,19	977,76	971,78

Für den Temperaturbereich von 1 °C bis 90 °C kann für die Dichte des Wassers eine quadratische Näherungsformel verwendet werden. Die Temperatur wird in °C eingesetzt, der Fehler der berechneten Dichte gegenüber den Messwerten bleibt kleiner als 0,05 %.

$$\begin{aligned} \rho &= a + b \cdot \vartheta + c \cdot \vartheta^2 \\ a &= 1000,4 \text{ kg/m}^3 \\ b &= -5,49 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg/m}^3}{^\circ\text{C}} \\ c &= -3,77 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg/m}^3}{^\circ\text{C}^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.2 Dichte von Gasen

Bei idealen Gasen ist die Bewegungsenergie der Teilchen (Atome oder Moleküle) derart groß, dass die gegenseitigen Anziehungskräfte zwischen den Teilchen vernachlässigt werden können. Daher werden die Teilchen jedes zur Verfügung stehende Volumen gleichmäßig ausfüllen, Hohlräume im makroskopischen Sinne können nicht entstehen. Für den Zusammenhang zwischen dem Druck p , dem zur Verfügung stehendem Volumen V und der Temperatur T (im absoluten Maß) gilt die allgemeine Zustandsgleichung:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (1.7)$$

Die dimensionslose Zahl n gibt die im Volumen enthaltenen Stoffmenge (Mol) an, die Größe R ist die allgemeine Gaskonstante.

$$R = 8,3145 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \quad (1.8)$$

Wir dividieren beide Seiten der Zustandsgleichung Gl. (1.7) durch die Masse m des Gases, welches im Volumen V enthalten ist. Auf der linken Seite erhalten wir die Dichte im Nenner. Auf der rechten Seite erhalten wir neben der Temperatur T den Quotienten aus der allgemeinen Gaskonstante R und der molaren Masse M des speziellen Gases. Für diesen Quotienten führen wir die Bezeichnung **spezifische Gaskonstante** R_{sp} ein.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{n \cdot R}{m} \cdot T = \frac{R}{M} \cdot T = R_{\text{sp}} \cdot T \quad \text{weil} \quad m = n \cdot M \quad (1.9)$$

Die Umstellung liefert für die Dichte:

$$\rho = \frac{p}{R_{\text{sp}} \cdot T} \quad \text{und} \quad \rho_{\text{N}} = \frac{p_{\text{N}}}{R_{\text{sp}} \cdot T_{\text{N}}} \quad (1.10)$$

Für die Tabellierung der Stoffkonstanten verschiedener Gase wird die Normdichte ρ_{N} für den normalen Luftdruck p_{N} und die Bezugstemperatur T_{N} definiert.

$$p_{\text{N}} = 1013,25 \text{ hPa} \quad \text{und} \quad T_{\text{N}} = 273,15 \text{ K} \quad (1.11)$$

Die Tabelle zeigt für einige Gase die molare Masse M , die errechnete spezifische Gaskonstante R_{sp} und die daraus resultierende Normdichte ρ_{N} .

Tabelle 1.3 Stoffkonstanten einiger Gase nach [1.1] und [1.2]

Gas	Luft	O ₂	N ₂	CO ₂	CH ₄	H ₂	He
<i>M</i> in kg/kmol	28,95	32,00	28,01	44,01	16,04	2,02	4,00
<i>R</i> _{sp} in kJ/(kg · K)	0,287	0,260	0,297	0,189	0,518	4,126	2,078
Dichte ρ_N in kg/m ³	1,292	1,428	1,250	1,963	0,717	0,09	0,178

Die Dichte eines Gases bei beliebigem Druck p und beliebiger Temperatur T ergibt sich zu:

$$\rho = \rho_N \cdot \frac{p}{p_N} \cdot \frac{T_N}{T} \quad (1.12)$$

Beispiel:

Die Luft in einem Heißluftballon hat 50 °C, die Umgebung des Ballons hat 0 °C und es herrscht Normdruck.

$$\frac{\rho}{\rho_N} = \frac{p}{p_N} \cdot \frac{273 \text{ K}}{323 \text{ K}} \approx 1 \cdot 0,845$$

Die Dichte im Ballon beträgt ca. 84,5 % der Dichte der umgebenden Luft.

Die Dichte eines Gases wird durch Dämpfe anderer Substanzen geringfügig beeinflusst. Insbesondere verändert Wasserdampf die Dichte der Luft.

Die Veränderung durch eventuell verschiedenen CO₂-Gehalt kann für technische Berechnungen vernachlässigt werden. Die Dichte der trockenen Luft beträgt ρ_{tr} .

Für die Berechnung der Dichte der feuchten Luft existiert eine international empfohlene Formel [1.2].

Die Umstellung dieser Formel liefert unter Vernachlässigung des CO₂-Anteils eine Korrekturvorschrift für die Dichte ρ_f der feuchten Luft:

$$\rho_f = \rho_{tr} \cdot \left(1 - 0,378 \cdot \varphi \cdot \frac{p_D}{p} \right) \quad (1.13)$$

Darin bedeutet φ die relative Luftfeuchte (als Dezimalbruch) und p_D den Dampfdruck des gesättigten Wasserdampfes bei der entsprechenden Temperatur.

Man beachte, dass die Dichte der feuchten Luft geringer ist als die Dichte der trockenen Luft. Die molare Masse des Wasserdampfes ist mit ca. $M = 18 \text{ kg/kmol}$ deutlich kleiner als die molare Masse der Luft. Da bei feuchter Luft ein Teil der Luftmoleküle durch Wassermoleküle (als Gas!) ersetzt ist, ist die resultierende Dichte geringer.

Die Tabelle zeigt den Dampfdruck des gesättigten Wasserdampfes als Funktion der Temperatur:

Tabelle 1.4 Dampfdruck des Wassers nach [1.2]

Temperatur in °C	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Dampfdruck in hPa	6,11	8,72	12,28	17,05	23,39	31,69	42,45	56,26	73,81	95,90	123,4

Beispiel:

Bei Normdruck soll die Lufttemperatur 30 °C und die relative Luftfeuchte 60 % betragen. Die Dichte der trockenen Luft berechnet sich nach Gl. (1.12) zu $\rho_{tr} = 1,164 \text{ kg/m}^3$.

Der Korrekturfaktor (Klammerausdruck in Gl. (1.13)) ergibt den Zahlenwert 0,9905.

Die Dichte der feuchten Luft beträgt $\rho_f = 1,153 \text{ kg/m}^3$.

Die Dichte ist aufgrund der Feuchtigkeit um ca. 1 % abgesunken.

Die Änderung der Dichte durch die Luftfeuchtigkeit liegt auch unter extremen klimatischen Bedingungen im einstelligen Prozentbereich, sodass sie für viele praktische Belange vernachlässigt werden kann.

1.3 Schweredruck in Flüssigkeiten

Aufgrund der Erdanziehung übt eine Flüssigkeit – genauso wie ein Festkörper – eine Kraft auf die Unterlage bzw. den Gefäßboden aus. An dieser Kraftwirkung sind alle Flüssigkeitsteilchen beteiligt. Es erhebt sich die Frage nach der Gesetzmäßigkeit der Kraftübertragung im Inneren der Flüssigkeit.

Die höher liegenden Flüssigkeitsschichten müssen die auf sie wirkende Schwerkraft, trotz der freien Beweglichkeit ihrer Teilchen, in irgendeiner Weise auf die tiefer liegenden Schichten übertragen, sodass sich die Gesamtwirkung am Boden des Gefäßes einstellt.

Wir betrachten im Innern eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes eine willkürlich herausgegriffene Säule mit der Querschnittsfläche A . Von dieser Säule untersuchen wir einen Abschnitt, der von der Oberfläche der Flüssigkeit bis in die Tiefe h reichen soll. Die Gewichtskraft dieses Säulenabschnittes berechnet sich mit der Massendichte ρ und der Erdbeschleunigung g aus dem Volumen V :

$$F_G = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot h \cdot A \tag{1.14}$$

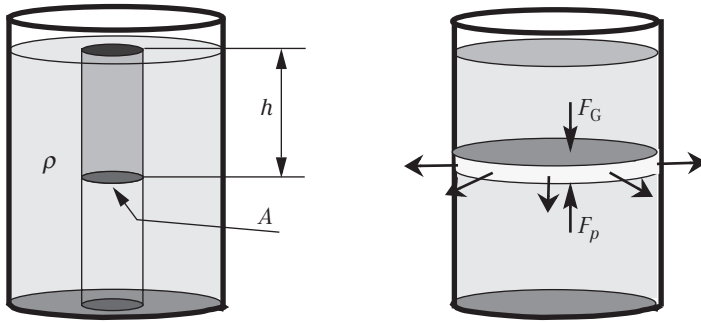


Bild 1.1 Erklärung des Schweredruckes und Veranschaulichung der freien Beweglichkeit

Diese Gewichtskraft F_G wirkt nach unten, aber der Säulenabschnitt ruht in der Gesamtmenge der Flüssigkeit, daher muss an seiner unteren Querschnittsfläche eine gleich große Gegenkraft nach oben wirken.

Diese Überlegung trifft für jede beliebige Querschnittsfläche A zu. Daher ist es sinnvoll, die Gewichtskraft auf die Querschnittsfläche zu beziehen, diese Größe erhält die Bezeichnung **Druck** p .

$$p = \frac{F_G}{A} = \rho \cdot g \cdot h \quad (1.15)$$

Das ist der **Schweredruck**, der in einer Flüssigkeit in der Tiefe h unterhalb der Oberfläche wirkt.

Wegen der freien Beweglichkeit der Teilchen würden diese den wirkenden Kräften nach allen Seiten ausweichen, wenn keine entsprechenden Gegenkräfte vorhanden wären. Wir betrachten in der Tiefe h einen sehr schmalen Ring in der Gefäßwand. Auf alle Teilchen, die sich in der Flüssigkeitsschicht innerhalb dieses Ringes befinden, wirken von oben die Gewichtskräfte F_G der darüberliegenden Schichten und von unten die Gegenkräfte F_p infolge des Druckes in den darunterliegenden Schichten. Wäre die Wand an irgendeiner Stelle dieses Ringes tatsächlich unterbrochen, dann würden die Teilchen dieser Schicht in Richtung zu dieser offenen Stelle ausweichen, weil von dort keine Gegenkraft aufgebracht wird.

Im Ergebnis dieser Überlegung erkennen wir eine wichtige Eigenschaft:

Der Druck wirkt gleichmäßig in alle Richtungen. Er ist eine skalare, d. h. ungerichtete Größe. Die mit dem Druck verbundene Kraft wirkt stets senkrecht auf das jeweils betrachtete Flächenelement.

1.4 Dimension des Druckes

Die Dimension des Druckes lautet „Kraft durch Fläche“. Die Einheit im Internationalen Einheitensystem (SI) wird nach dem französischen Wissenschaftler B. PASCAL (1623–1662) benannt. Das Kurzzeichen lautet Pa.

$$[p] = 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (1.16)$$

Neben dieser Einheit ist in Technik und Meteorologie die Einheit **Bar** (bar) gebräuchlich, sie beschreibt annähernd den natürlichen mittleren Luftdruck.

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad (1.17)$$

In der Meteorologie war historisch die Angabe des Luftdruckes in **Millibar** (mbar) üblich. Um die gleichen Zahlenwerte beizubehalten, wird der Luftdruck jetzt in der Einheit **Hektopascal** (hPa) angegeben.

Die im englischsprachigen Raum gebräuchliche Einheit **psi** bedeutet pound per square inch, die Umrechnung: $1 \text{ psi} = 6\,895 \text{ Pa} = 0,069 \text{ bar}$; $1 \text{ bar} = 14,5 \text{ psi}$.

1.5 Kommunizierende Gefäße

Der Schweredruck in Flüssigkeiten ist gemäß Gl. (1.15) nur von der Tiefe (aber nicht vom Querschnitt) abhängig.

Daraus folgt eine bemerkenswerte Konsequenz: Flüssigkeitssäulen ungleicher Gestalt, insbesondere auch mit ungleichem Querschnitt, werden einander das Gleichgewicht halten, wenn sie miteinander in Verbindung stehen (kommunizieren).

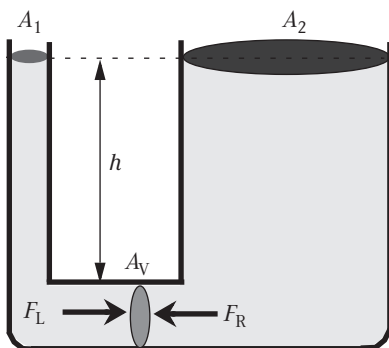


Bild 1.2 Kommunizierende Gefäße

Die beiden Säulen mit den Querschnittsflächen A_1 und A_2 in Bild 1.2 sind mit einer Röhre vom Querschnitt A_V verbunden. Der von den beiden gleich hohen Säulen in der Tiefe h erzeugte Druck ist nach Gl. (1.15) gleich groß. Die beide Säulen verbindende Querschnittsfläche A_V bestimmt die von beiden Seiten wirkenden Kräfte F_L und F_R , die damit entgegengesetzt gleich sind.

In verbundenen Gefäßen wird die Oberfläche der eingefüllten Flüssigkeit in jedem Gefäßteil die gleiche Höhe erreichen.

Betrachtet man hingegen die Kräfte, die nötig wären, um mittels eines Kolbens den Druck zu erhöhen, wird deutlich, dass eine kleine Kraft auf der Seite A_1 eine deutlich größere Kraft auf der Seite A_2 hervorrufen wird. Die technische Anwendung findet sich in hydraulischen Antrieben.

1.6 Kräfte auf die Gefäßwände

Die durch den Druck hervorgerufene Kraft auf ein Flächenelement ΔA in der Wand ist stets senkrecht auf dieses Flächenelement gerichtet. Um diese Tatsache mathematisch zu erfassen, wird das Flächenelement durch seinen Normalenvektor definiert. Die Richtung des Normalenvektors wird so gewählt, dass er in das Gefäßinnere – also in die Flüssigkeit hinein – weist. Somit berechnet sich die Kraft auf das Flächenelement zu

$$\vec{\Delta F} = -p \cdot \vec{\Delta A} \quad (1.18)$$

Da sich der Druck entlang der Fläche ändern kann und die Fläche selbst gekrümmt sein könnte, muss die Gesamtkraft als Summe über viele kleine ebene Flächenelemente berechnet werden. Der Grenzübergang zu unendlich kleinen Flächenelementen liefert das Integral:

$$\vec{F}_G = - \int_A p d\vec{A} \quad (1.19)$$

Die durch den Druck hervorgerufenen Kräfte können in ihre vertikalen und horizontalen Komponenten zerlegt und einzeln berechnet werden. Der Luftdruck hat keinen Einfluss, weil sowohl die Flüssigkeit als auch die Gefäßaußenwand mit dem Luftdruck beaufschlagt sind, sodass sich die mit dem Luftdruck verbundenen Kräfte gegenseitig aufheben.

Für ein prismatisches Gefäß mit ebenem Boden kann die vertikale Kraft auf die Bodenfläche berechnet werden.

Der Schweredruck nimmt mit der Tiefe zu, daher wählen wir ein Koordinatensystem, bei dem die z -Richtung in die Tiefe weist. Den Koordinatenursprung legen wir in die Oberfläche der Flüssigkeit. Die Bodenfläche des Gefäßes wird durch einen Vektor repräsentiert, der in die Flüssigkeit hinein – also nach oben – weist.

Nach Gl. (1.19) erhalten wir eine positive Größe für die Gesamtkraft, d. h., die Kraft ist in z -Richtung – also auf den Boden – gerichtet:

$$\vec{F}_G = \vec{e}_z \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \vec{e}_z \cdot \rho \cdot g \cdot V \quad (1.20)$$

Da der Bodendruck nur von der Höhe der Flüssigkeit bis zur Oberfläche, nicht aber von der Form der Flüssigkeitssäule und auch nicht von ihrer geometrischen Anordnung und Gestalt abhängt, wirkt auf die Bodenfläche eine Kraft, die der Gewichtskraft eines gedachten Flüssigkeitsvolumens V über der Grundfläche bis in die Höhe der Oberfläche entspricht. Das heißt, die Kraft auf die Bodenfläche kann durchaus größer – aber auch kleiner – sein als die Gewichtskraft der darüber befindlichen Flüssigkeit.

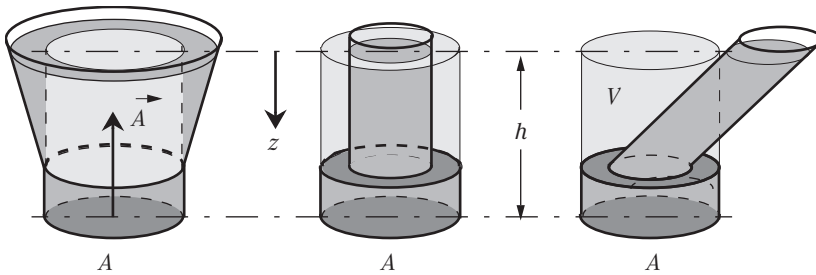


Bild 1.3 Zum hydrostatischen Paradoxon

Dieser Umstand wird als **hydrostatisches Paradoxon** bezeichnet (paradox: widersinnig, gegen die Erwartung). In Bild 1.3 sind die Bodenflächen der verschiedenen Gefäße gleich groß, aber die Gestaltung der Gefäße ist deutlich unterschiedlich, trotzdem wird auf die Bodenfläche jeweils die gleiche Kraft ausgeübt, weil Flüssigkeit in allen Gefäßen bis zur gleichen Höhe aufgefüllt ist.

1.7 Auftrieb (Archimedisches Prinzip)

Wenn ein Festkörper in eine Flüssigkeit eingetaucht wird, dann wirken auf Oberseite und Unterseite unterschiedliche Druckkräfte.

Die Verhältnisse klären wir an einem zylindrischen Körper der Höhe h und der Querschnittsfläche A .

Beliebig geformte Körper können wir uns immer zusammengesetzt aus vielen differenziell kleinen prismatischen Säulen vorstellen, sodass die für einen Zylinder hergeleitete Beziehung für die Auftriebskraft für alle Körperformen gilt.

Das Koordinatensystem wird derart gewählt, dass die z -Richtung in die Tiefe weist und der Koordinatenursprung in der Flüssigkeitsoberfläche liegt.

Die Vektoren, die den Oberflächenelementen des Körpers zugeordnet werden, weisen in die Flüssigkeit – also nach außen.

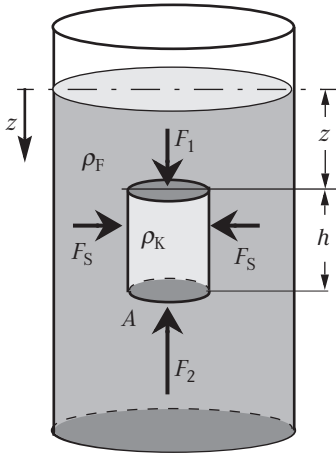


Bild 1.4 Auftrieb

Die Deckfläche des Körpers soll sich in der Tiefe z befinden. Wir erhalten nach Gl. (1.19) die Druckkraft F_1 in z -Richtung:

$$\vec{F}_1 = \vec{e}_z \cdot (\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A \cdot z) \quad (1.21)$$

Die Kräfte F_S , die seitlich auf den Körper einwirken, kompensieren sich gegenseitig. Die Druckkraft auf die Bodenfläche des Körpers liefert einen negativen Wert, weil der Normalenvektor dieser Fläche in z -Richtung weist. Die Kraft ist aufwärts gerichtet:

$$\vec{F}_2 = -\vec{e}_z \cdot [\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A \cdot (z + h)] \quad (1.22)$$

Die Summe der beiden Druckkräfte liefert die aufwärts gerichtete Auftriebskraft F_A :

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{e}_z \cdot (\rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A \cdot h) \quad (1.23)$$

Das Produkt aus Grundfläche und Höhe berechnet das Volumen des Körpers.

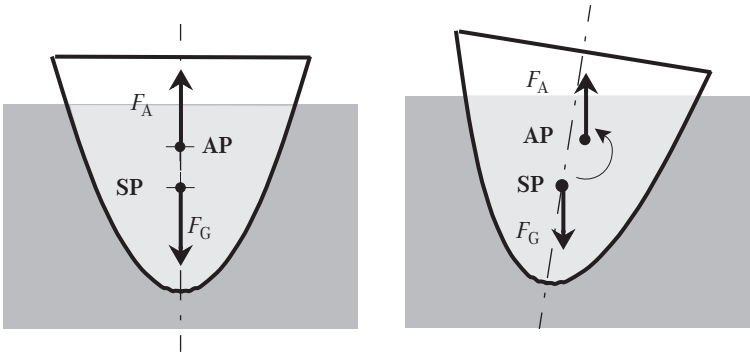
Der Betrag der Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit:

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot V_K \quad (1.24)$$

Diese Berechnung gilt gleichermaßen für Körper in Gasen. Für die üblichen Feststoffe ist der Einfluss des Auftriebs in Luft kaum merklich, für gasgefüllte Luftballons kann der Auftrieb die Gewichtskraft übersteigen.

Schwimmen:

Ein schwimmender Körper taucht nur so weit in die Flüssigkeit ein, bis die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit genau gleich dem Eigengewicht des Körpers ist.

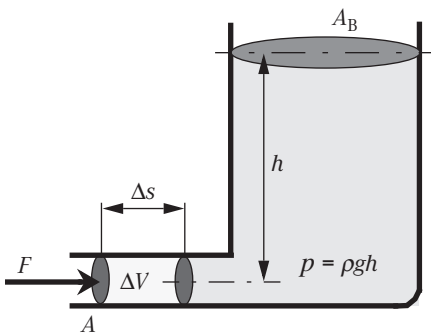
**Bild 1.5** Schwimmen

Der Angriffspunkt der Auftriebskraft F_A liegt im Schwerpunkt AP der verdrängten Flüssigkeitsmenge, er hängt also von der äußeren Form des Körpers ab. Damit der Körper eine stabile Lage beibehält, muss der körpereigene Schwerpunkt SP unterhalb des Auftriebspunktes liegen.

Nur dann wird eine zufällige Abweichung von der Lage durch das entstehende Drehmoment kompensiert. Es ist jedoch auch zu beachten, dass sich die Lage des Auftriebspunktes verändert, wenn sich der Körper neigt, weil sich dabei auch die Form der verdrängten Flüssigkeitsmenge verändert.

1.8 Druck und Energie

Wir betrachten ein gefülltes Bassin mit einem sehr großen Querschnitt A_B , welches in der Tiefe h unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche mit einem Rohr verbunden ist. Durch dieses Rohr soll zusätzliche Flüssigkeit in das Bassin gepumpt werden. Dafür ist ein dicht schließender Kolben mit der Fläche A vorgesehen, der um das Wegstück Δs verschoben wird.

**Bild 1.6** Arbeitsaufwand beim Pumpen

Dabei wird das Teilvolumen ΔV in das Bassin hineingepresst. Dieser Vorgang soll sehr langsam erfolgen, sodass die Flüssigkeitsteilchen keine nennenswerte Bewegungsenergie erhalten. In diesem Fall muss der Kolben genau die Kraft aufbringen, die notwendig ist, um dem Druck der Flüssigkeit das Gleichgewicht zu halten. Bei der Verschiebung des Kolbens um den Weg Δs muss eine Arbeit aufgewendet werden (daher negativ).

$$\Delta W = -F \cdot \Delta s = -p \cdot A \cdot \Delta s = -p \cdot \Delta V \quad (1.25)$$

Wenn die Reibung in der Flüssigkeit vernachlässigt wird, dann bleibt die aufgewendete Arbeit als potenzielle Energie erhalten. Der Kolben könnte andersherum durch den Druck der Flüssigkeit nach außen geschoben werden, wobei er Arbeit leisten würde.

Mit dieser Überlegung wird eine bemerkenswerte Definition des Begriffes Druck sichtbar:

Der Druck beschreibt die potenzielle Energie, die in jedem Volumenelement einer Flüssigkeit oder eines Gases gespeichert ist.

$$p = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta V} \quad (1.26)$$

Wenn der Kolben entfernt wird, beginnt die Flüssigkeit auszufließen. Die durch den Druck gespeicherte potenzielle Energie wandelt sich in kinetische Energie der strömenden Teilchen, weil kein Gegendruck wirkt:

$$\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta V} = p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot v^2 = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad (1.27)$$

Der Schweredruck p berechnet sich nach Gl. (1.15), sodass die Ausflussgeschwindigkeit v berechnet werden kann:

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g} \quad (1.28)$$

Der italienischer Physiker E. TORRICELLI (1608–1647; Mitarbeiter, später Nachfolger von GALILEI) formulierte 1644 erstmals diese Tatsache als **Ausflussgesetz**:

Wenn eine inkompressible Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwerkraft in der Tiefe h unter der Flüssigkeitsoberfläche aus der Öffnung eines Gefäßes ausfließt, wird unabhängig von der Dichte eine Ausflussgeschwindigkeit erreicht, deren Betrag genauso groß ist, als wäre die Flüssigkeit im freien Fall aus der Höhe h herabgestürzt.

(Die Strömungsrichtung ist jedoch abhängig von der Wahl der Ausflussöffnung.)

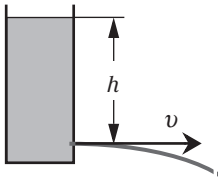


Bild 1.7 TORRICELLI-Problem

Beispiel:

Der Drei-Schluchten-Staudamm in China staut das Wasser bis zu einer Höhe von 180 m. Mit welcher Geschwindigkeit schießt das Wasser an der Talsohle durch ein Rohr ins Freie? Welche Wassermenge ist pro Sekunde nötig, um eine Leistung von 1 GW an Turbinen zu übertragen (bei idealisierend 100 % Wirkungsgrad)?

$$v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g} \approx 59,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 214 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aus Gl. (1.27) folgt:

$$\Delta E_{\text{pot}} = p \cdot \Delta V \Rightarrow P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = p \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{P}{\rho g h} \approx 566 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

1.9 Wandkräfte in Rohren

Wenn in einem Rohr der Innendruck p größer ist als der Außendruck p_a , dann müssen Zugkräfte in der Rohrwand die Wirkung der Druckdifferenz $p_d = p - p_a$ kompensieren.

Wir betrachten in einer Rohrwand ein kleines Wandelement ΔA . In Längsrichtung des Rohres hat das Wandelement die Länge ΔL . Quer zur Längsrichtung ist das Wandelement gekrümmt, in dieser Richtung soll es die Länge $\Delta s = r \Delta \alpha$ aufweisen.

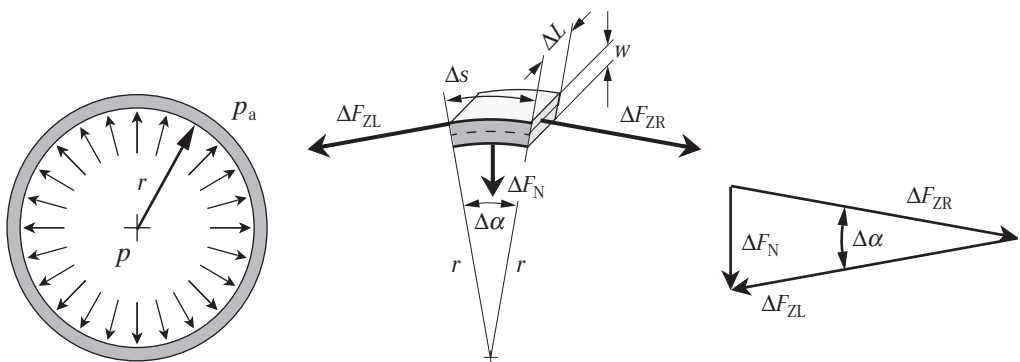


Bild 1.8 Wandkräfte im Rohr

Die Druckkraft ΔF_p auf dieses Wandelement ist nach außen gerichtet:

$$\Delta F_p = p_d \cdot \Delta A = p_d \cdot \Delta L \cdot \Delta s = p_d \cdot \Delta L \cdot r \cdot \Delta \alpha \quad (1.29)$$

Die Zugkräfte ΔF_{ZL} und ΔF_{ZR} , die links und rechts am Flächenelement angreifen, sind vom Betrag $|\Delta F_Z|$ her gleich groß, aber gegeneinander um den Winkel $\Delta \alpha$ geneigt.

Die Summe der beiden Zugkräfte ergibt eine Normalkraft ΔF_N für dieses Flächenelement, die nach innen gerichtet ist:

$$\Delta F_N = \Delta F_Z \cdot \Delta \alpha \quad (1.30)$$

Diese Normalkraft muss der Druckkraft das Gleichgewicht halten, wir erhalten die Bedingung:

$$\Delta F_Z \cdot \Delta \alpha = p_d \cdot \Delta L \cdot r \cdot \Delta \alpha \quad (1.31)$$

Pro Längeneinheit des Rohres erhalten wir eine Zugkraft:

$$\frac{\Delta F_Z}{\Delta L} = p_d \cdot r \quad (1.32)$$

Das heißt, je größer der Durchmesser einer Rohrleitung gewählt wird, umso größer werden auch die Kräfte in der Rohrwandung. Wenn die Rohrwandung die Wandstärke w aufweist, berechnet sich die Zugspannung σ in der Wand zu:

$$\sigma = \frac{\Delta F_Z}{\Delta L \cdot w} = p_d \cdot \frac{r}{w} \quad (1.33)$$

Beispiel:

Für die Erdgastrasse „Drushba“ wurden Rohre mit einem Durchmesser von 1420 mm und einer Wandstärke von 16 mm verwendet. Der Presse konnte man entnehmen, dass der Überdruck in Pumpstationen immer wieder auf 70 bar erhöht wird. Welche Zugspannung entsteht in der Rohrwandung?

$$\sigma = 70 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \frac{710 \text{ mm}}{16 \text{ mm}} \approx 311 \text{ MPa}$$

Hinweis: Die zulässige Zugspannung für CrMo-Stahl beträgt 380 MPa.

Durch den Überdruck im Inneren wird die Rohrwand nicht nur in tangentialer Richtung, sondern auch in axialer Richtung belastet. Die Zugspannung σ_a in axialer Rohrrichtung berech-

net sich aus der Druckkraft auf die Abschlussfläche und aus der Näherung für die Querschnittsfläche der Rohrwandung:

$$\sigma_a = \frac{F}{A} = \frac{p \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot r \cdot w} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r}{w} = \frac{\sigma_t}{2} \quad (1.34)$$

Die axiale Zugbelastung ist nur halb so groß wie die tangentielle Zugspannung. Da die Rohrwand der tangentialen Belastung standhalten muss, kann die Rohrwand auch die Zugbelastung infolge der Reaktionskräfte aufnehmen.

1.10 Luftdruck

Im Alltag wird der Luftdruck kaum wahrgenommen, weil er von allen Seiten auf die Körper einwirkt, sodass sich die damit verbundenen Druckkräfte gegenseitig kompensieren. Erst wenn man eine Fläche eines Körpers einem geringeren Druck aussetzt, bemerkt man den Luftdruck.

Das Quecksilberbarometer (erfunden von TORRICELLI) wird dadurch realisiert, dass zunächst eine einseitig verschlossene Glasröhre mit Quecksilber randvoll gefüllt wird. Das offene Ende wird provisorisch verschlossen, die Röhre wird umgedreht, und das provisorisch verschlossene Ende wird in eine Schale mit Quecksilber getaucht. Nach Entfernen des provisorischen Verschlusses sinkt die Quecksilbersäule in der Röhre so weit ab, bis die Höhendifferenz der beiden Quecksilberoberflächen nur noch ca. 760 mm beträgt.

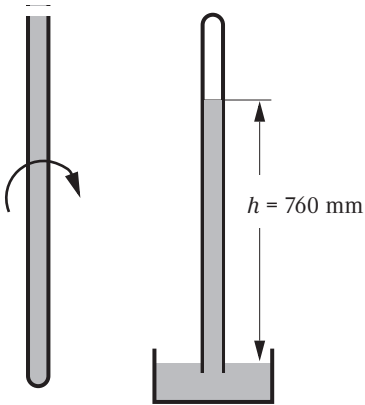


Bild 1.9 Quecksilberbarometer (schematisch)

Der Umstand, dass die Quecksilbersäule in der Glasröhre nicht vollständig auf null absinkt, ist auf den Luftdruck zurückzuführen, der auf die offene Schale wirkt und somit der verbleibenden Quecksilbersäule das Gleichgewicht hält.

Bis ins letzte Jahrhundert wurde der Luftdruck in der Einheit **mm Quecksilbersäule** (mmHg) gemessen, die Einheit erhielt nach dem Erfinder den Namen **Torr**. Die Umrechnung: 1 Torr = 133,3 Pa = 1,333 hPa.

In der Medizin hält sich diese Einheit weiterhin für die Angabe des Blutdruckes.

Das gleiche Experiment könnte man mit einem wassergefüllten Rohr durchführen. Da aber die Dichte des Wassers ca. 13-mal geringer ist als die des Quecksilbers, wäre die verbleibende Wassersäule ca. 10 m hoch. Über dieser Wassersäule würde sich in einem fest verschlossenem Rohr ein sogenanntes **TORRICELLI-Vakuum** einstellen. Der Druck in diesem Raum wäre der Dampfdruck des Wassers entsprechend der Temperatur, das sind ca. 2–4 % des normalen Luftdruckes.

Diese Überlegung zeigt, dass mit einer saugenden Pumpe – unabhängig von ihrer Bauart – Wasser nur bis zu einer Höhe von maximal 10 m gefördert werden könnte. Stellt man die unvermeidlichen Verluste der Pumpe in Rechnung, dann ergibt sich eine praktisch realisierbare maximale Förderhöhe von ca. 6 m.

Für größere Förderhöhen (Trinkwasserversorgung, Bergwerksentwässerung u. Ä.) müssen daher immer Druckpumpen am unteren Ende der Förderhöhe eingesetzt werden.

1.11 Barometrische Höhenformel

In der Atmosphäre befinden wir uns sozusagen „auf dem Grund des Luftozeans“, allerdings können wir die Entfernung zur „Oberfläche dieses Ozeans“ nicht angeben, da in den hohen Luftschichten der Übergang in das Vakuum des Weltalls stetig nach einer monoton abklingenden Funktion erfolgt.

Anders als bei Flüssigkeiten ist bei Gasen die Massendichte ρ direkt proportional zum jeweils herrschenden Druck. Der Druck wird mit zunehmender Höhe geringer und damit verringert sich auch die Massendichte.

Wir betrachten eine Luftsäule, die vom Boden in eine unendlich große Höhe emporreicht. Am Boden messen wir den Luftdruck p_0 , dort beträgt die ebenfalls messbare Massendichte ρ_0 .

In der Höhe h beträgt der Druck p und die Massendichte ρ .

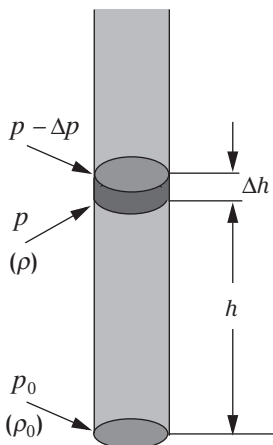


Bild 1.10 Zur barometrischen Höhenformel

Steigen wir in der Luftsäule um das kleine Stück Δh empor, dann verringert sich der Druck um den Betrag Δp . Für diese sehr kleine Höhendifferenz Δh dürfen wir die Dichte des Gases als konstant ansehen, damit können wir die Druckabnahme Δp berechnen:

$$\Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta h \quad (1.35)$$

Mit der Proportionalität zwischen Druck und Massendichte können wir die Massendichte ρ in der Höhe h durch die am Boden messbaren Verhältnisse (p_0, ρ_0) und den in der Höhe h herrschenden Druck p ausdrücken:

$$\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p \quad (1.36)$$

Die Druckabnahme ist also dem jeweils herrschenden Druck selbst proportional.

Bei gleichen Höhendifferenzen Δh sinkt der Druck in Bodennähe schneller ab als in großen Höhen.

$$\Delta p = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot p \cdot \Delta h \quad (1.37)$$

Der Grenzübergang Δh gegen 0 liefert eine Differenzialgleichung für die Berechnung des Druckes in Abhängigkeit von der Höhe:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot dh \quad (1.38)$$

Die Integration liefert

$$\ln(C \cdot p) = -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h \quad (1.39)$$

Am Boden, also in der Höhe $h = 0$, herrscht der bekannte Luftdruck p_0 , damit wird die Integrationskonstante C berechnet:

$$\ln(C \cdot p_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C \cdot p_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{p_0} \quad (1.40)$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird die Exponentialfunktion gebildet, wir erhalten die **barometrische Höhenformel**:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h} \quad (1.41)$$

Der Ausdruck im Bruch des Exponenten enthält bei konstanter Temperatur nur konstante Größen. Diese können wir zusammenfassen. Den Kehrwert bezeichnen wir als Höhenkonstante H . Für die Normalbedingungen erhalten wir folgende Zahlenwerte:

$$H = \frac{p_N}{\rho_N \cdot g} = \frac{1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 8000 \text{ m} \quad (1.42)$$

Damit können wir die Gl. (1.41) in eine für praktische Übersichtsrechnungen zweckmäßige Form bringen:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{h}{H}} \approx e^{-\frac{h}{8000 \text{ m}}} \quad (1.43)$$

Einige Werte für den Druck in verschiedenen Höhen zeigt die folgende Tabelle:

Tabelle 1.5 Luftdruck bei Normalbedingungen in verschiedenen Höhen

h in km	1	2	3	5	8	10	20	37	110	184
p/p_0	0,88	0,78	0,69	0,53	0,37	0,29	0,08	10^{-2}	10^{-6}	10^{-10}

Einschränkend muss darauf hingewiesen werden, dass diese Überlegungen nur für eine Luftsäule mit überall gleicher Temperatur gilt. In der Realität machen sich temperaturbedingte Dichteschwankungen zusätzlich bemerkbar.

1.12 Kamin

Die Druckabnahme in Abhängigkeit von der Höhe wird auch durch die Dichte des Gases bestimmt. Eine geringere Dichte bewirkt nach Gl. (1.41) eine geringere Druckabnahme. Die Dichte eines Gases ist temperaturabhängig, sodass zwei gleich hohe Gassäulen unterschiedlicher Temperatur auch unterschiedliche Druckverhältnisse aufweisen werden.

Die Wirkung des Kamins (Schornsteins) beruht auf der höheren Temperatur des Gases im Inneren des Kamins gegenüber der Umgebung, d. h., die Kaminwand hat im Wesentlichen die Aufgabe, eine Wärmeisolation zur Umgebung herzustellen.

Die geringere Dichte des erwärmten Gases im Inneren des Kamins bewirkt eine unterschiedliche Druckveränderung entlang der Höhenänderung im Kamin. Der Kehrwert der Gleichung (1.9) liefert den Zusammenhang zwischen den Größen Druck, Dichte und Temperatur:

$$\frac{\rho}{p} = \frac{M}{R \cdot T} = \frac{1}{R_{\text{sp}} \cdot T} \quad (1.44)$$

Im betrachteten Kamin soll die innere Luftsäule die Temperatur T_2 haben, und außen herrsche die Temperatur T_1 .

Am Boden soll in beiden Säulen der gleiche Ausgangsdruck p_0 herrschen, und im Außenraum ist die Dichte des Gases am Boden ρ_0 .

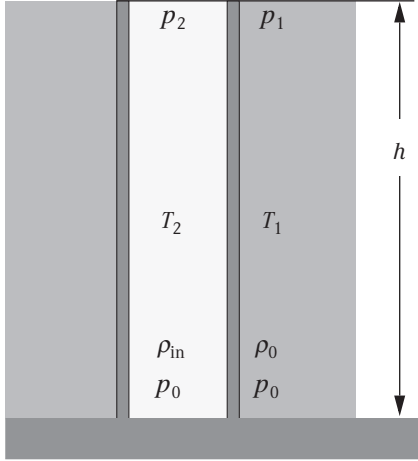


Bild 1.11 Zur Berechnung am Kamin

Der Druck in der Höhe h kann daher mit Gl. (1.41) für beide Luftsäulen in Abhängigkeit von der Temperatur errechnet werden:

$$p_1 = p_0 \cdot e^{-\frac{gh}{R_{sp} \cdot T_1}} \quad \text{und} \quad p_2 = p_0 \cdot e^{-\frac{gh}{R_{sp} \cdot T_2}} \quad (1.45)$$

Wir errechnen den Überdruck, der am oberen Ende zwischen der inneren Luftsäule und dem Außendruck auftritt, als Druckdifferenz Δp :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 \cdot \left(e^{-\frac{gh}{R_{sp} \cdot T_2}} - e^{-\frac{gh}{R_{sp} \cdot T_1}} \right) \quad (1.46)$$

Der zweite Term wird ausgeklammert, sodass die Druckdifferenz in der Höhe h auf den Außendruck p_1 in dieser Höhe zurückgeführt werden kann:

$$\Delta p = p_0 \cdot e^{-\frac{gh}{R_{sp} \cdot T_1}} \cdot \left[e^{\frac{gh}{R_{sp}} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} - 1 \right] = p_1 \cdot \left(e^{\frac{gh}{R_{sp}} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2}} - 1 \right) \quad (1.47)$$