Jessica Pilchner

Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Multiplikation

Eine empirische Studie mit Siebtklässlern

Diplomica Verlag

Jessica Pilchner
Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Multiplikation: Eine empirische Studie mit Siebtklässlern

ISBN: 978-3-8366-4765-6
Herstellung: Diplomica® Verlag GmbH, Hamburg, 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung... 3

2 Theoretische Einordnung der empirischen Studie................................ 5

2.1 Bruchrechnung in den Kernlehrplänen und Bildungsstandards........................5

2.2 Grundlagen der Bruchrechnung...7

2.2.1 Begriffsklärung: Bruchrechnung, Bruch und Bruchzahl 8

2.2.2 Eigenschaften gemeiner Brüche 8

2.2.3 Darstellungsformen für Bruchzahlen 9

2.2.4 Rechenregeln für Brüche... 10

2.3 Grundvorstellungen in der Bruchrechnung 12

2.3.1 Was sind Grundvorstellungen? 12

2.3.2 Neuer Zahlbereich – neue Grundvorstellungen 14

2.3.3 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen.. 15

2.3.4 Grundvorstellungen zur Multiplikation mit Bruchzahlen 20

2.4 Empirische Befunde zu Schülervorstellungen 23

2.4.1 Schülervorstellungen zu Bruchzahlen 23

2.4.2 Schülervorstellungen zur Multiplikation mit Bruchzahlen 24

3 Beschreibung und Auswertung der empirischen Studie 28

3.1 Organisation des Briefwechsels...28

3.2 Methode des Briefwechsels zur Datenerhebung...29

3.3 Beschreibung der Auswertungsmethode 31

3.4 Erster Brief 33

3.4.1 Begründung für die Inhalte des ersten Briefs 33

3.4.2 Mögliche Lösungen zum ersten Brief 36

3.4.3 Einzelfallanalyse Mia 38

3.4.4 Einzelfallanalyse Daniel.. 39

3.4.5 Einzelfallanalyse Janina 40

3.4.6 Zusammenfassung der ersten Antwortbriefe.. 42

3.5 Zweiter Brief 44

3.5.1 Begründung für die Inhalte des zweiten Briefs 44

3.5.2 Mögliche Lösungen zum zweiten Brief 46

3.5.3 Einzelfallanalyse Mia 47

3.5.4 Einzelfallanalyse Daniel.. 49

3.5.5 Einzelfallanalyse Janina 51

3.5.6 Zusammenfassung der zweiten Antwortbriefe.. 52

3.6 Dritter Brief 53

3.6.1 Begründung der Inhalte des dritten Briefs 53

3.6.2 Mögliche Lösungen zum dritten Brief 55

3.6.3 Einzelfallanalyse Mia 58

3.6.4 Einzelfallanalyse Daniel.. 61

3.6.5 Einzelfallanalyse Janina 62

3.6.6 Zusammenfassung der dritten Antwortbriefe.. 64

3.7 Zusammenfassung der Auswertungsergebnisse 65

3.7.1 Zusammenfassung der Fallbeispiele Mia und Daniel 65

3.7.2 Zusammenfassung des Fallbeispiels Janina 66

4 Fazit... 68

Quellenverzeichnis 70

Anhang 73

1 Einleitung

„Und merk dir ein für allemal den wichtigsten von allen Sprüchen: Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl, allein ein großes in den Brüchen."[1]

Bedenkt man, dass diese Weisheit von keinem Geringeren als Johann Wolfgang von Goethe stammt, so wird erkennbar, dass sich die Bruchrechnung im Vergleich zur Rechnung mit natürlichen oder ganzen Zahlen schon vor langer Zeit als heikles Gebiet herausstellte. Heute greifen Mathematikdidaktiker wie Heinrich Winter Goethes Zitat auf, um aufzuzeigen, dass sich die gegenwärtige Situation in dieser Hinsicht nicht von der damaligen unterscheidet; weiterhin herrscht bei vielen Schülern[2] eine große Verständnislosigkeit beim Übergang von den natürlichen Zahlen in den neuen Zahlbereich der Bruchzahlen.[3] In zahlreichen didaktischen Lehrbüchern und fachdidaktischen Zeitschriftenartikeln zum Thema Bruchrechnung, die als hauptsächliche Literaturquellen dieses Buches dienen, weisen Mathematikdidaktiker daher ausdrücklich auf die Notwendigkeit hin, zuallererst ein ausreichend ausgebautes Grundverständnis von Bruchzahlen und deren Rechenoperationen bei den Schülern zu entwickeln, bevor die formalen Algorithmen der Bruchrechnung eingeführt werden,[4] da sonst die Gefahr eines „sinnentleerte[n], auswendig gelernte[n], aber letztlich unverstandene[n]"[5] Rechnens bestehe.

Die in diesem Buch beschriebende, von der Autorin durchgeführte Studie soll zeigen, inwieweit ein solches Grundverständnis tatsächlich bei Schülern aufgebaut wird. Die Daten dieser Untersuchung wurden mittels eines Briefwechsels mit drei Siebtklässlern, und somit *nach* der Vermittlung der wesentlichen Grundlagen zur Bruchrechnung im Unterricht, erhoben. Anhand verschiedener ausgewählter Aufgaben zu Bruchzahlen und insbesondere zur Multiplikation mit Bruchzahlen als Beispiel für eine der vier Grundrechenoperationen wird beobachtet, ob und falls ja, welche dazugehörigen Grundvorstellungen sich hinter den Schülerlösungen verbergen bzw. welche individuellen Vorstellungen erkennbar sind. Außerdem sollen mögliche Fehlvorstellungen der drei Schüler aufgedeckt werden.

Im zweiten Kapitel wird zunächst ein theoretisches Fundament zum Thema Bruchrechnung und Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und deren Multiplikation geschaffen, auf das sich die empirische Studie der Verfasserin stützt. In Kapitel 3 stehen

---

[1] Goethe, Urfaust; zitiert nach Winter (2004), S. 14
[2] Die männliche Form schließt im Folgenden die weibliche mit ein.
[3] Vgl. Winter (2004), S. 14 ff.; Prediger (2004), S. 10 ff.
[4] Vgl. Altevogt (1995), S. 8; Jannack/Koepsell (1995), S. 54; Malle (2004), S. 4; Malle/Huber (2004), S. 22; Wartha/Vom Hofe (2005), S. 14 f.
[5] Malle (2004), S. 4

vordergründig die Beschreibung und Auswertung der Studie, welche den Hauptanteil der Arbeit einnehmen werden, gefolgt von einem abschließenden Fazit in Kapitel 4.
Allgemein sei darauf hingewiesen, dass die Interpretation der Schülerbriefe hauptsächlich der Einzelfallanalyse der drei untersuchten Schüler dient, da das zu geringe Datenmaterial keine allgemeingültigen Schlüsse zulässt. Das bedeutet, dass mithilfe der Analysen lediglich das Ziel verfolgt wird, herauszufinden, wie einige Schüler *denken können*, nicht jedoch, wie Schüler im Allgemeinen *denken*.

2 Theoretische Einordnung der empirischen Studie

Dieses Kapitel klärt zunächst, welche Inhalte, Ziele und welcher Zeitpunkt und -umfang für die Behandlung des Themengebiets Bruchrechnung im Unterricht vorgesehen werden. Für diese Informationen werden die aktuellen Bildungsstandards, die Kernlehrpläne für Realschulen des Bundeslandes NRW, die für die an der empirischen Untersuchung beteiligten Schüler gelten, sowie das Schulbuch dieser Schüler herangezogen.

Vor diesem Hintergrund wird anschließend ein Überblick über die wesentlichen Begriffe und Rechengesetze aus der Bruchrechnung gegeben, die im Unterricht vermittelt werden und auf die die Aufgaben und Schülerlösungen in den Briefen aufbauen.

Das Hauptanliegen des Kapitels besteht jedoch in der detaillierten Beschreibung und kategorischen Einordnung unterschiedlicher Grundvorstellungen in Bezug auf Bruchzahlen und deren Multiplikation. Die anschließende Darstellung empirischer Befunde zur Bruchrechnung aus ausgewählten Literaturquellen zeigt auf, welche dieser Grund-, aber auch welche Fehlvorstellungen diesbezüglich bei Schülern existieren können. Welche der hier erwähnten Vorstellungen sich ggf. in den Schülerantworten aus den Briefen wiedererkennen lassen, wird in Kapitel 3 dargelegt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass im gesamten Kapitel *keine* Unterrichtskonzepte oder -methoden zur Vermittlung der hier genannten mathematischen Inhalte und Vorstellungen zur Bruchrechnung thematisiert werden. Obgleich sie zum Teil eng mit einigen Ausführungen in Verbindung stehen, sind sie für die empirische Studie irrelevant.

2.1 Bruchrechnung in den Kernlehrplänen und Bildungsstandards

Für die Planung, Durchführung und Auswertung der empirischen Studie ist es notwendig, vorab die Vorgaben zu kennen, nach denen die untersuchten Schüler unterrichtet werden. Nur so können der Jahrgangsstufe und Schulform angemessene Aufgabenstellungen formuliert und eine sinnvolle Beurteilung der Ergebnisse vorgenommen werden. Da die Schüler die siebte Klasse einer Realschule in NRW besuchen, gelten für sie die Kernlehrpläne für die Realschule in Nordrhein-Westfalen mit Orientierung an den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Im Folgenden werden daraus die Stellen zitiert, die die von den Schülern erwarteten Kompetenzen zur Bruchrechnung benennen. Die Auszüge dienen der Begründung für die Inhalte der nächsten Unterkapitel sowie der Nachvollziehbarkeit der Ausführungen zur empirischen Studie in Kapitel 3.

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“[6] werden unter der „Leitidee Zahl“ die folgenden „inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen“ zur Bruchrechnung genannt: „Die Schülerinnen und Schüler nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit“ und „begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen“[7]. Hier wird der Aufbau von Grundvorstellungen zur Bruchrechnung im Unterricht explizit gefordert. Diese werden ausführlich in Sektion 2.3 behandelt.

In den aktuellen „Kernlehrplänen für die Realschule in NRW“[8] lauten die „Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 6“[9] bzgl. der Bruchrechnung wie folgt: „Schülerinnen und Schüler stellen einfache Bruchteile auf verschiedene Weise dar: handelnd, zeichnerisch an verschiedenen Objekten, durch Zahlensymbole und als Punkte auf der Zahlengerade“, außerdem „deuten [sie] Dezimalzahlen und Prozentzahlen als andere Darstellungsform[en] für Brüche und stellen sie an der Zahlengerade dar“. Ebenso „führen [sie] Umwandlungen zwischen Bruch, Dezimalzahl und Prozentzahl durch“. Auf Darstellungsweisen für Bruchzahlen wird in Sektion 2.2.3 eingegangen.

Des Weiteren sollen die Schüler Bruchzahlen „als Größen, Operatoren und Verhältnisse“ deuten. Diese Forderung bezieht sich speziell auf die verschiedenen Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff, welche in Sektion 2.3.3 detailliert beschrieben werden.

Außerdem soll „das Grundprinzip des Kürzens und Erweiterns von Brüchen als Vergröbern bzw. Verfeinern der Einteilung [genutzt]“ und „Grundrechenarten […] (Kopfrechnen und schriftliche Rechenverfahren) mit einfachen Brüchen (Addition/Subtraktion)“ ausgeführt werden. Die Bruchrechenregeln werden kurz in Sektion 2.2.4 angesprochen.

Am Ende der Jahrgangsstufe 8 sollen die Schüler laut der o. g. Kernlehrpläne über folgende Kompetenzen verfügen:[10] Sie sollen „rationale Zahlen [ordnen und vergleichen]“ und „Grundrechenarten für rationale Zahlen aus[führen] (Kopfrechnen und schriftliche Rechenverfahren)“. Zudem wird erwartet, dass sie „ihre Kenntnisse über rationale Zahlen und einfache lineare Gleichungen zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme“ verwenden und „außermathematische Gründe und Beispiele

---

[6] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg., 2004)
[7] Ebd., S. 10
[8] Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg., 2004)
[9] Ebd, S. 20; für die nachfolgenden Auszüge vgl. ebd.
[10] Für die nachfolgenden Auszüge vgl. ebd., S. 24

für die Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen zu den rationalen Zahlen" nennen können. Dass die zuletzt genannten Kompetenzen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen voraussetzen, wird in den Sektionen 2.3 und 2.4 gezeigt.

Aus dem aktuellen Schulbuch der drei Realschüler, „Schnittpunkt", das in Anpassung an die Kernlehrpläne in NRW erstellt wurde, wird ersichtlich, zu welchem Zeitpunkt und in welchem Umfang die jeweiligen Inhalte in etwa im Unterricht vermittelt werden. Während die Behandlung der Bruchrechnung noch vor ca. 15 Jahren ausschließlich für das sechste Schuljahr vorgesehen war und ihr Anteil in entsprechenden Schulbüchern ca. $\frac{2}{3}$ betrug,[11] wird sie in modernen Büchern wie „Schnittpunkt" durch eine Ausdehnung auf mehrere Schuljahre entzerrt.[12] In „Schnittpunkt" werden im fünften Schuljahr zunächst solche Brüche thematisiert, die an die Alltagserfahrungen der Schüler anknüpfen wie z. B. Bruchteile von Größen.[13] Im sechsten Schuljahr nimmt die Bruchrechnung mit ca. $\frac{2}{5}$ immer noch einen großen Anteil des Schulbuchs ein.[14] In diesem Jahr werden das Kürzen und Erweitern sowie das Addieren, Subtrahieren, Vervielfachen (Multiplizieren einer natürlichen Zahl mit einem Bruch) und Aufteilen (Dividieren eines Bruchs durch eine natürliche Zahl) gemeiner Brüche[15] behandelt.[16] Zudem wird die Dezimalbruchrechnung in einem separaten Kapitel vermittelt.[17] Erst im siebten Schuljahr wird das Multiplizieren und Dividieren von Brüchen thematisiert.[18] Außerdem wird die Bruchrechnung in diesem Schuljahr auf den Bereich der (zusätzlich negativen) rationalen Zahlen ausgeweitet und in verwandten Themen wie der Prozentrechnung vertieft. Darüber hinaus wird sie bei der Behandlung von Termen und Gleichungen mit Variablen sowie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt.[19]

2.2 Grundlagen der Bruchrechnung

An dieser Stelle werden einige wichtige Begriffe aus der Bruchrechnung, die zum Verständnis der folgenden (Unter-)kapitel und als theoretische Grundlage für die Auswertung der empirischen Studie von Nöten sind, definiert und erklärt. Nachdem die wesentlichen Eigenschaften gemeiner Brüche genannt worden sind, werden verschiedene Darstellungsarten für Brüche und die grundlegenden Bruchrechengesetze

---

[11] Vgl. Griesel/Postel (1993)
[12] Vgl. Böttner (2005; 2006 a; 2006 b)
[13] Vgl. Böttner (2005), S. 162 ff.
[14] Vgl. Böttner (2006 a)
[15] Siehe Sektion 2.2.1
[16] Vgl. Böttner (2006 a), S. 54 ff.
[17] Vgl. ebd., S. 100 ff.
[18] Vgl. Böttner (2006 b), S. 14 ff.
[19] Vgl. Böttner (2006 b)

– das Kürzen und Erweitern und die vier Grundrechenarten – kurz beschrieben. Die jeweiligen Herleitungen und Beweise bleiben dabei unbeachtet, da diese für die empirische Studie nicht von Belang sind.

2.2.1 Begriffsklärung: Bruchrechnung, Bruch und Bruchzahl

Die Bruchrechnung bildet den Oberbegriff für das Rechnen mit *gemeinen* bzw. *gewöhnlichen Brüchen* sowie mit *Dezimalbrüchen* im Zahlbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Eine Bruchzahl/rationale Zahl kann sowohl durch einen gemeinen Bruch als auch durch einen Dezimalbruch dargestellt werden.[20] Der Zusammenhang zwischen den Begriffen „Bruch" und „Bruchzahl" besteht darin, dass ein Bruch die Schreibweise für eine Bruchzahl ist und dass ein und dieselbe Bruchzahl durch unendlich viele Brüche ausgedrückt werden kann. Die Bruchzahl „ein Viertel" kann beispielsweise durch die gemeinen Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, etc. (eine Erklärung hierfür wird in Sektion 2.2.4 unter Kürzen und Erweitern gegeben) sowie durch die Dezimalbrüche 0,25, 0,250 etc. beschrieben werden.

Da sich die gesamte empirische Untersuchung allerdings nur auf den Bereich der gemeinen Brüche bezieht, kann eine weitere Betrachtung der Dezimalbruchrechnung vernachlässigt werden. Letztere wird deshalb nur selten erwähnt. Im weiteren Verlauf seien „Brüche" als „gemeine Brüche" definiert, andernfalls wird explizit von „Dezimalbrüchen" gesprochen.

Des Weiteren werden im Folgenden die Begriffe „Bruch" und „Bruchzahl" nicht differenziert, sofern ihr Unterschied im jeweiligen Zusammenhang nicht von Bedeutung ist. Wenn also „durch gemeine Brüche bezeichnete Bruchzahlen" gemeint sind, kann sowohl lediglich von „Brüchen" als auch von „Bruchzahlen" die Rede sein.

Ferner werden in der empirischen Studie ausschließlich Vorstellungen zu Brüchen in Form von *positiven* rationalen Zahlen erforscht. Aus diesem Grund sei bei der zukünftigen Verwendung der Begriffe „Bruch(zahl)" und „Bruchrechnung" nur der positive Zahlbereich angesprochen.

2.2.2 Eigenschaften gemeiner Brüche[21]

Ein (gemeiner) Bruch ist eine andere Schreibweise für einen Quotienten, bei dem ein Bruchstrich den Doppelpunkt ersetzt. Über dem Bruchstrich steht der Dividend, welcher als *Zähler* bezeichnet wird; unter ihm befindet sich der Divisor, welcher im Bruch *Nenner* heißt.

---

[20] Vgl. Padberg (2002), S. 3

[21] Für die folgenden Definitionen vgl. Heynkes (2005)

$\forall$ (für alle) a, b$\in \mathbb{N}$[22] ist also $\frac{a}{b} = a:b$, wobei $a :=$ Zähler/Dividend und $b :=$ Nenner/Divisor.
Während der Nenner eines Bruchs aussagt, in wie viele gleichgroße Teile ein Ganzes geteilt wird, gibt der Zähler die Anzahl dieser Teile an.
Man unterscheidet zwischen *echten* und *unechten* Brüchen*. Echte Brüche* haben einen Wert zwischen 0 und 1. Ihr Zähler ist daher stets kleiner als ihr Nenner. Bei Brüchen >1 (mit Zähler$>$Nenner) spricht man von *unechten Brüchen.* Diese können in *gemischte Zahlen/gemischte Brüche* umgewandelt werden, die eine Kombination aus einer natürlichen Zahl und einem direkt dahinter notierten echten Bruch bilden. Die natürliche Zahl ergibt sich dabei aus dem ganzzahligen Ergebnis der Division von Zähler durch Nenner; der echte Bruch setzt sich aus dem Rest dieser Division als Zähler und dem ursprünglichen Nenner zusammen. Beispielsweise lässt sich der unechte Bruch $\frac{8}{3}$ in die gemischte Zahl $2\frac{2}{3}$ umformen.
Als *Scheinbrüche* bezeichnet man Brüche, die gleichzeitig natürliche Zahlen sind, z. B. $\frac{6}{3} = 2$.[23]
Stammbrüche sind alle Brüche mit dem Zähler 1.
Mehrere Brüche sind *gleichnamig*, wenn ihr Nenner identisch ist.
Bei dem *Kehrwert* eines Bruches sind Zähler und Nenner vertauscht. Multipliziert man einen Bruch mit seinem Kehrwert, erhält man als Ergebnis 1.
Ein Bruch mit dem Zähler 0 hat den Wert 0. Ein Bruch mit dem Nenner 0 existiert nicht, da die Division durch 0 nicht definiert ist.

2.2.3 Darstellungsformen für Bruchzahlen

Es gibt verschiedene Arten der Darstellung von Bruchzahlen, die sich laut Padberg (2002) in die Kategorien *Materialien, Bilder, geschriebene Symbole, gesprochene Symbole und Alltags-/Umweltsituationen* einordnen lassen.[24]
Da *Materialien*, die der Repräsentation von Brüchen dienen, mehr in der Unterrichtspraxis als in der empirischen Studie Anwendung finden, werden sie hier nicht näher erläutert.
Bilder können in Form von *Abbildungen wirklicher Situationen oder Gegenstände*, als *geometrische Ganze* wie Strecken (Zahlenstrahle), Kreise, Kugeln, Rechtecke oder Quader, als *diskrete Ganze* wie Mengen oder als *kontinuierliche Ganze* vorkommen

[22] Hier gilt ebenso a, b $\in \mathbb{Z}$. Da die Arbeit jedoch nur von positiven Bruchzahlen handelt, werden folglich Zähler und Nenner stets als Elemente der natürlichen Zahlen angesehen.
[23] Vgl. Padberg (2002), S. 128
[24] Vgl. ebd., S. 30

(siehe Abb.1).[25] Darüber hinaus können diese Ganzen bestimmt, unbestimmt, strukturiert und unstrukturiert sein (siehe Abb. 2).[26]

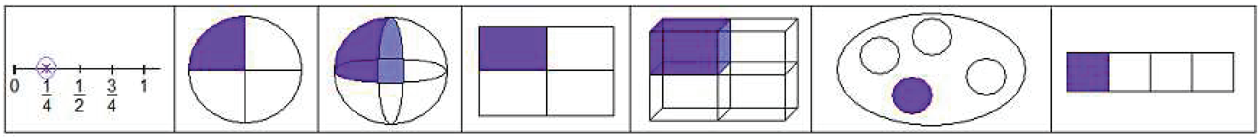

Abbildung 1: Bildliche Darstellungen des Bruchs $\frac{1}{4}$ mithilfe von Zahlenstrahl, Kreis, Kugel, Rechteck, Quader, diskreter Menge und kontinuierlicher Menge

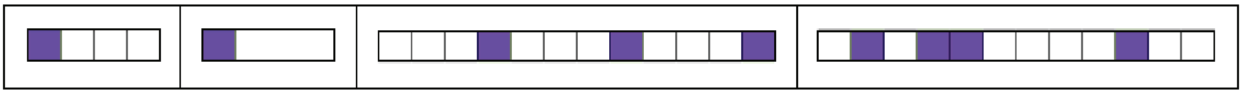

Abbildung 2: Bildliche Darstellungen des Bruchs $\frac{1}{4}$ in bestimmtem, unbestimmtem, strukturiertem und unstrukturiertem Ganzen

Die Kategorie *geschriebene Symbole* spiegelt die verschiedenen Schreibweisen für eine Bruchzahl wider. Die Bruchzahl $\frac{1}{4}$ kann als gemeiner Bruch in „reiner Ziffernschreibweise“[27] ($\frac{1}{4}$) oder in „quasikardinaler Schreibweise“[28] (1 Viertel) , als Dezimalbruch (0,25) , als Quotient ($1:4$) oder als Prozentwert (25%, was nichts anderes als $\frac{25}{100}$ bedeutet) geschrieben werden.[29] Die *gesprochenen Symbole* sind für die Empirie nicht relevant, da es sich um einen schriftlichen Austausch handelt.

Bruchdarstellungen durch *Umweltsituationen* können mit Handlungen bzw. Darstellungen auf der enaktiven Ebene, aber auch mit Beschreibungen von Zuständen verbunden sein. So kann der Bruch $\frac{1}{4}$ z. B. durch das Vierteln einer Torte und das Nehmen eines Stückes oder durch die Statistik „Jeder vierte deutsche Haushalt besitzt mindestens ein Haustier.“[30] repräsentiert werden.

2.2.4 Rechenregeln für Brüche[31]

<u>Kürzen und Erweitern</u>

Enthalten Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinsamen Faktor, so kann der Bruch durch diesen *gekürzt* werden, indem sowohl der Zähler als auch der Nenner durch diesen Faktor dividiert werden. Der aus dem Vorgang des Kürzens hervorge-

[25] Ebd. (2002), S. 39
[26] Hefendehl-Hebeker (1996), S. 21
[27] Padberg (2002), S. 38
[28] Ebd.
[29] Vgl. ebd.
[30] Aussage frei vom Verfasser erfunden
[31] Für die folgenden Regeln vgl. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, S. 1

gangene Bruch hat denselben Wert wie der Ursprungsbruch, d. h. beide beschreiben dieselbe Bruchzahl.

$\forall$ a, b, c $\in \mathbb{N}$ ist also $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$.

Vollzieht man den Kürzungsprozess in umgekehrter Reihenfolge nach, so *erweitert* man. Beim Erweitern werden Zähler und Nenner jeweils mit der gleichen Zahl multipliziert, ohne dass sich dabei der Wert des Bruches ändert. Das Erweitern ist häufig beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen notwendig. $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{N}$ gilt $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Zwei gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den (übereinstimmenden) Nenner beibehält: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{N}$

Um gleichnamige Brüche zu erhalten, muss ggf. zunächst auf ein Vielfaches aller Nenner, bestenfalls auf das kleinste gemeinsame Vielfache, erweitert werden.

Formal gilt also $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{d \cdot a \pm b \cdot c}{b \cdot d}$.

Eine natürliche Zahl und ein Bruch werden addiert bzw. subtrahiert, indem die natürliche Zahl in einen Bruch mit Nenner 1 umgewandelt wird. Anschließend wird wie bei der Addition bzw. Subtraktion von Brüchen verfahren. $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{N}$ gilt $a \pm \frac{b}{c} = \frac{c \cdot a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{c \cdot a \pm b}{c}$.

Werden eine natürliche Zahl und ein echter Bruch addiert (und umgekehrt), kann letzterer auch direkt hinter die natürliche Zahl geschrieben werden. Auf diese Weise erhält man das Ergebnis in Form einer gemischten Zahl. $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{N}$, b < c gilt $a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}$.

Multiplikation und Division von Brüchen

Man multipliziert zwei Brüche, indem man jeweils ihre Zähler und ihre Nenner miteinander multipliziert. $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{N}$ ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Eine natürliche Zahl wird mit einem Bruch multipliziert (und umgekehrt), indem die natürliche Zahl mit dem Zähler multipliziert und der Nenner beibehalten (bzw. mit dem gedachten Nenner 1 der natürlichen Zahl multipliziert) wird. $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{N}$ gilt $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

Man dividiert zwei Brüche, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert, d. h. $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{N}$ ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Analog zu den natürlichen Zahlen bildet die Subtraktion die Umkehroperation der Addition und die Division die der Multiplikation. Außerdem gelten auch in $\mathbb{Q}^+$ das