CIME Summer Schools

3

E. Bompiani (Ed.)

Equazioni differenziali non lineari

Varenna, Italy 1954

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

E. Bompiani (Ed.)

Equazioni differenziali non lineari

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
September 15-24, 1954

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10885-3 e-ISBN: 978-3-642-10886-0
DOI:10.1007/978-3-642-10886-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Florence, 1954
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, September 15-24, 1954

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

Introduction.

1. Nous allons considérer des équations différentielles (systèmes) de la forme $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,t)$. Dans la plupart des cas x représentera ici un vecteur (colonne) dans un espace euclidien réel E_n à n dimensions avec la norme usuelle $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ où x_i sont les composants de x; mais plusieurs théorèms sont valables dans des conditions plus générales, où x est un vecteur appartenant à un espace linéaire convenable, par exemple, à un espace de Banach. Nous désignons par $S_n(a)$ (ou simplement S_n) une sphère (boule) $\|x\| < a$, où a est un nombre positif t représente une variable scalaire (temps), $-\infty < t < +\infty$; cependant dans la plupart des théorèms, il suffit de considérer les valeurs non-negatives de t. Nous représentons par J et J+, respectivement les intervalles $-\infty < t < +\infty$ et $0 \leq t < +\infty$. f est une fonction vectorielle de l'espace $E_n \times J$ (ou $E_n \times J^+$) (ou bien de $S_n \times J$ ou de $S_n \times J^+$) dans l'espace E_n; l'équation $\dot{x} = f(x,t)$ est donc une représentation abregée du système d'ordre n

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \;. \end{aligned}$$

Nous admettrons que f est continue et satisfait en outre à des hypothèses de régularité suffissantes pour assurer l'existence, unicité et dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales, c'est à dire: Si x_0 est un point quelconque de S_n et t_0 un nombre quelconque appartenant à J (ou a J^+), il existe dans un certain intervalle $t_1 < t < t_2$, où $t_1 < t_0 < t_2$, une et une seule solution x(t) de l'équation $\dot{x} = f(x,t)$ que satisfait aux conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et qu'on peut répresenter par $x(t) = F(t,x_0,t_0)$, où $F(t_0,x_0,t_0) \equiv x_0$. Pour de petites variations des argiments x_0,t_0 la fonction F existe dans l'intervalle $t_1 < t < t_2$ et dépend continûment de x_0,t_0.

Nous dirons, que la solution $F(t,x_0,t_0)$ existe dans l'avenir(dans le passé)si elle existe pour tout $t \geq t_0$ $(t \leq t_0)$.

Pour étudier l'allure des courbes intégrales dans le voisinage d'une solution $x(t)$ qu'existe dans l'avenir (et dans le passé) on peut toujours supposer que c'est la solution $x = 0$, c'est à dire que $f(0,t) \equiv 0$ pour $t \in J^+$ (pour $t \in J$), parce qu'on réduit le cas général au cas spécial moyennant le changement de variable $y=x-x(t)$; c'est ce que nous ferons toujours dans la suite.

Supposons donc que $F(0,t) \equiv 0$. Alors $F(t,x_0,t_0)$ est définie pour un intervalle de la variable t aussi grand qu'on voudra pourvu que x_0 soit assez petit (t_0 quelconque) et $F(t,x_0,t_0) \to 0$ lorsque $x_0 \to 0$ (t et t_0 fixes).

Nous dirons que la solution x=0 est <u>stable</u> (**Liapunov**) si, pour chaque t_0 fixe, et pour x_0 assez petit, la fonction $F(t,x_0,t_0)$ existe dans l'avenir et tend <u>uniformément</u> (par rapport a $t \geq t_0$) vers zéro lorsque $x_0 \to 0$. C'est à dire, si on donne t_0 et $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \delta \implies \| F(t,x_0,t_0) \| < \varepsilon \quad \text{pour } t \geq t_0.$$

δ dépend, en général, non seulement de ε mais aussi de t_0; cependant il résulte immédiatement de la continuité de F par rapport à x_0 que si la condition de stabilité est satisfaite pour un certain t_0 elle l'est automatiquement pour n'importe quelle autre valeur de t_0(mais, en général, avec un δ différent).

La distinction entre continuité et stabilité dépend en fin de comptes de la topologie qu'on adopte dans l'espace des solutions. Supposons que, pour t_0 fixe et x_0 assez petit, $F(t,x_0,t_0)$ existe toujours dans l'avenir. Alors on peut considérer les deux topologies suivantes dans l'espace des solutions: a) une topologie faible, c'est à dire, on donne un nombre fini de valeurs $t_i > t_0$ et de nombres $\varepsilon_i > 0$ et on définit le voisinage de la solution x=0 par les inégalités $\| F(t_i,x_0,t_0) \| < \varepsilon_i$; b) une topologie forte (uniforme) où le voisinage de x=0 est défini par $\|F(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$, $\varepsilon > 0$ étant donné. Pour la topologie faible il y a toujours continuité par rapport à x_0; pour la topologie forte la continuité par rapport à x_0 n'est pas autre chose que la stabilité. On peut noter que (dans l'espace des solutions d'une équation différentielle) la topologie forte dans un intervalle fini coincide avec la topologie faible; mais il n'est pas ainsi, en général, dans J^+.

On dira que x=0 est instable si elle n'est pas stable.

On dira que x=0 est asymptotiquement stable si elle est stable et en outre $\lim_{t \to +\infty} F(t,x_0,t_0)=0$ pour tout $t_0 \in J^+$ $x_0 \in S_n(\delta_0)$ où δ_0 est un certain nombre positif.

Il ne faut pas confondre ces notions de stabilité avec autres qui ont été formulées (stabilité à la Poisson,etc.)

Il est peut être inutile d'insister sur l'importance de la notion de stabilité. Etant donné qu'on ne peut jamais connaître les conditions initiales qu'avec un certain degré d'approximation, pour que la représentation d'un phénomène physique comme solution d'un système différentiel ait vraiment un sens, il faut que l'écart entre la solution théorique et la solution approximative soit petit lorsque les écarts initiaux sont petits, c'est à dire, que la solution soit stable. Considérons plus spécialement le cas d'un servomécanisme S chargé de maintenir un régime determiné de fonctionnement d'un appareil quelconque A; on exige alors en général que les perturbations accidentelles soient annullées par l'action du servo, c'est à dire, que le régime en question soit asymptotiquement stable par le système (S,A).

2. Supposons que le système différentiel soit autonome ($f(x,t)$ ne dépend pas de t) ou plus généralement périodique ($f(x,t+\tau) \equiv f(x,t)$). On a alors évidemment $F(t+\tau, x_0, t_0+\tau) \equiv F(t, x_0, t_0)$. Ceci permet de définir une transformation topologique $\theta : E_n \to E_n$ par $\theta x_0 = x_1 = F(\tau, x_0, 0)$, avec la proprieté $\theta^m x_0 = x_m = F(m\tau, x_0, 0)$ pour chaque entier positif m.
Le point $x=0$ est un point fixe pour θ et on peut voir facilement que la solution $x = 0$ du système différentiel est stable, instable ou asymptotiquement stable selon que, respectivement, a) $\|\theta^m x_0\| < \varepsilon$ pour chaque m entier positif et $\|x_0\| < \delta$ (on dit alors que le point fixe est stable); b) on ne peut pas trouver $\delta > 0$ tel que la condition précédente soit remplie (le point fixe est alors instable); ou c) la condition a) est remplie et en outre $\theta^m x_0 \to 0$ pour chaque $\|x_0\| < \delta_0$ lorsque $m \to +\infty$ (le point fixe est alors asymptotiquement stable).
Dans les cas mentionnés on peut donc réduire le problème de la stabilité du système différentiel au problème de la stabilité d'un point fixe d'une transformation topologique. La formulation topologique plus abstraite permet d'embrasser d'un seul coup d'autres problèmes du même type rélatifs à des équations aux différences finies , à des équations

intégrals, etc.
On doit signaler cependant que cette réduction est possible d'une façon naturelle seulement dans le cas de systèmes autonomes et périodiques.
Nous n'utiliserons pas cette voie topologique dans ce cours.

3. La notion de stabilité a été étudiée depuis longtemps. Déjà Lagrange (Mécanique Analitique, 1788) demontra un théorème fondamental sur la stabilité de l'équilibre d'un système matériel (cas autonome). Plus tard Routh (1877), Thompson et Tait (1879), Zukovskiĭ (1882) se sont occupés de problèmes de stabilité de plus en plus généraux, mais c'est Poincaré (1881) qui le premier, dans le célèbre mémoire "Sur les courbes définies par les équations différentielles", donne des démonstrations rigoureuses de théorème sur la stabilité.
Poincaré a considéré seulement quelque cas particulier du problème et c'est Lyapunov dans son remarquable mémoire "Problème général de la stabilité du mouvement "(1892) [24] qui pose le problème en toute sa généralité et en donne la solution complète dans les cas les plus importants.
Le mémoire de Lyapunov a inspiré les travaux d'un grand nombre de mathématiciens contemporains, particulièrement de l'école soviétique, qui ont fait progrésser la théorie considérablement dans les dernièrs années. Les applications de cette théorie aux problèmes de régulation automatique et à d'autres questions qui ont une énorme importance pratique est sans doute un stimulant puissant pour ces études.

4. Considérons d'abord le cas très particulier où $f(x,t)$ est indépendante de t (système autonome) et linéaire en x, c'est à dire le système est linéaire à coefficients constants: $\dot{x} = A x$ où A est une matrice constante.

On connaît alors l'expression analytique des solutions ce qui permet de décider par simple inspection sur la stabilité de la solution $x=0$. Le résultat qu'on peut énoncer est le suivant:

La condition nécéssaire et suffissante pour que la solution $x=0$ (ou, en réalité, n importe quelle solution) soit stable est que toutes les racines caractéristiques de la matrice A (racines de l'équation $|A - \lambda I| = 0$, où I est la matrice unité et le symbole $|M|$ désigne le déterminant de la matrice M) aient partie réelle ≤ 0, et que celles qui sont imaginaires pures soint simples ou, plus généralement, qu'elles correspondent à des diviseurs élémentaires linéaires (c'est à dire que la partie correspondante de la forme canonique de Jordan soit diagonale pure). Pour que la stabilité soit asymptotique il faut et il suffit que les parties réelles de toutes les racines caractéristiques soient < 0.

Etant donné que la stabilité est une propriété locale, on peut espérer que le problème de la stabilité de la solution $x=0$ d'une système non-linéaire $\dot{x} = f(x,t)$ pourra être réduit au problème beaucoup plus simple de la stabilité du système linéaire correspondant à la "première approximation", c'est à dire, du système $\dot{x} = A(t)\,x$ où $A(t)$ est la matrice jacobienne de f par rapport à x, calculée pour $x=0$. Dans les cas les plus simples, cette question de la "stabilité en première approximation" se résoud par l'affirmative; on peut, par exemple, démonstrer très facilement le théorème suivant:

Si la matrice $A(t)$ de la première approximation ne dépend pas, en réalité, de t et si les racines caractéristiques ont des parties réelles négatives (ou, ce qui revient à la même chose, d'après le théorème précédent, si la solu-

tion $x=0$ du système $\dot{x} = A\,x$ est asymptotiquement stable), alors la solution $x=0$ du système $\dot{x} = f(x,t)$ est asymptotiquement stable; si au moins une des racines caractéristiques a une partie réelle positive , la solution $x=0$ du système non linéaire est instable.
C'est le genre de théorèmes démontrés par Lagrange, Routh et Poincaré. De là l'utilité pour les applications aux problèmes de stabilité des méthodes de Hurwitz qui permettent de décider sur le signe des parties réelles des racines d'une équation algébrique.
Cependant, dans des cas moins simples, par exemple, s'il y a des racines caractéristiques imaginaires pures o bien si la matrice $A(t)$ dépend effectivement de t, les choses se compliquent beaucoup, et il peut se faire que le comportement, du point de vue de la stabilité, de la solution $x=0$ des deux systèmes $\dot{x} = f(x,t)$ et $\dot{x} = A(t)\,x$ soit opposé, c'est à dire qu'elle soit stable pour l'un des systèmes (et même asymptotiquement stable) et instable pour l'autre.
On peut donner immédiatement des exemples très simples pour illustrer quelques unes de ces situations.
Il faut, donc disposer de théorèmes plus puissants sur la stabilité en général et, en particulier, sur la stabilité en première approximation. Nous étudierons dans la première partie de ce cours des méthodes et théorèmes généraux sur la stabilité et, dans la seconde partie, la stabilité en première approximation, précedée de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires. Etant donné le temps très court dont nous disposerons , nous laisserons entièrement de côté, des questions aussi importantes que la stabilité des systèmes linéaires à coefficients périodiques et l'étude des cas critiques, qui pourraient faire, elles seules, l'object d'un cours de la même ou ancore plus grande extension.

- Première partie - THÉORÈMES GÉNÉRAUX -

5. Considérons un système differentiel

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{5.1}$$

où f est définie au moins dans la région $S(a) \times J^+$, $a > 0$, et $f(0,t) \equiv 0$.

Nous ferons une remarque préliminaire: On peut toujours supposer que f est définie dans tout l'espace $E_n \times J$ et, que les solutions de (5.1) existent dans le passé et dans l'avenir. S'il n'en était pas ainsi pour le système (5.1), considérons le système

$$\dot{x} = g\,(x,t) \tag{5.2}$$

où $g \equiv f$ lorsque $\|x\| < a - \varepsilon$ et $t \geqslant \varepsilon$ (ε étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra), et $g \equiv 0$ lorsque $\|x\| > a$ ou bien lorsque $t < 0$: dans les régions $\|x\| \leqslant a$, $0 \leqslant t < \varepsilon$, et $a-\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant a$, $t \geqslant \varepsilon$, g pourra être quelconque, pourvu qu'elle soit suffisamment régulière. Il est évident alors que les solutions de (5.2) existent dans le passé et dans l'avenir (elles sont même des constantes au moins pour $t < 0$ et pour $\|x\| \geqslant a$) et d'autre part les propriétés de stabilité des solutions x=0 de (5.1) et (5.2) sont identiques, puisqu'elles sont des propriétés locales. On peut même garder des propriétés importantes du système (5.1) en modifiant légèrement la définition de g; par exemple, si f est périodique (par rapport a t) on peut prendre $g(x,t) \equiv f(x,t).\,h(x)$ où $h(x)$ est une fonction suffisamment régulière qui est = 1 pour $\|x\| < a - \varepsilon$ et =0 pour $\|x\| > a$.

Les remarques précédentes ne s'appliquent pas pour des types spéciaux de stabilité " im grossen ", et quelques fois nous serons obligés d'introduire explicitement l'hypothèse d'existence des solutions dans le passé (Cfr. par exemple, théorème 12.4).

6. Supposons par exemple que la solution $x=0$ soit stable. Alors l'ensemble des points (x,t) où $x=F(t,x_0,0)$, $t \geqslant 0$ et $\|x_0\| = r$, r étant un nombre positif quelconque assez petit, constitue un "tube" dans l'espace $E_n \times J^+$, c'est à dire une n-variété V_r (hypersurface) avec les trois propriétés caractéristiques suivantes: a) pour chaque $T \geqslant 0$, l'intersection de V_r avec le plan $t=T$ est une $(n-1)$-sphère topologique (c.à d., homéomorphe à la sphère $\|x\| = 1$ de l'espace E_n) qui sépare dans le plan $t=T$ le point $(0,T)$ des points (x,T) où $\|x\| = a$; b) pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que, si $r < \delta$, V_r est contenu dans le cylindre $\|x\| = \varepsilon$ de l'espace $E_n \times J$; c) les vecteurs f ne "sortent" pas de V_r (on peut dire aussi qu'ils "pénètrent à l'intérieur de V_r au sens large"; en réalité dans le cas consideré ils sont toujours tangents à V_r).

On peut exprimer ces faits dans un langage analytique de la façon suivante: il existe une fonction scalaire $V(x,t)$ (à savoir la fonction $V(x,t) = \|x_0\|$ où x_0 est le "point initial" de (x,t), $x_0=F(0,x,t)$, $x=F(t,x_0,0)$) telle que:

d) $V(x,t)$ s'annulle pour $x=0$ et est une fonction définie positive, c.à d. pour chaque $\alpha > 0$ il existe un $\beta(\alpha) > 0$ tel que $\|x\| \geqslant \alpha$, $t \geqslant 0$, entraîne $V(x,t) \geqslant \beta(\alpha)$:

e) La derivée de V le long des trajectoires $dV/dt = (\partial V/\partial t) + (\partial V/\partial x).f(x,t)$ (où $\partial V/\partial x$ répresente le gradient de V par rapport à x, consideré comme vecteur colonne, et le point . désigne le produit matriciel, ici simplement le produit scalaire) est ≤ 0 (plus précisement $\equiv 0$ dans le cas présent). En effet, l'hypersurface $V(x,t)=r>0$ n'est pas autre chose que V_r; les propriétés a) et b) de V_r découlent de la propriété d) de V (il suffit de prendre $\delta = \beta(\varepsilon)$) et la propriété c) est une conséquence immédiate de e). Réciproquement: si le faisceau d'hypersurfaces $V(x,t) = r$ est un système de tubes ayant les propriétés a) b) et c), la fonction V possède les propriétés d) et e).

Il est immédiat aussi que s'il existe un système de tubes V_r avec les propriétés a) b) et c) ou, ce qui revient au même , s'il existe une fonction $V(x,t)$ avec les propriétés d) et e), la solution $x=0$ du système $\dot{x}=f(x,t)$ est stable. Nous avons ainsi démontré les deux théorèmes suivants, le premier desquels est dû a Lyapunov et le second a Persidskii. [36] .

6.1. S'il existe une fonction $V(x,t)$, $V(0,t)\equiv 0$, définie positive et telle que $dV/dt=(\partial V/\partial t)+(\partial V/\partial x).f(x,t)\leq 0$, la solution $x=0$ du système $\dot{x}=f(x,t)$ est stable.

6.2. Si la solution $x=0$ du système $\dot{x}=f(x,t)$ est stable, il existe une fonction $V(x,t)$, $V(0,t)\equiv 0$, définie postitive et telle que $dV/dt \leq 0$ (à savoir $V(x,t)=\|F(o,x,t)\|$).

Dans le cas où V ne dépend pas en réalité de t, on peut considérer $V(x)$ comme une nouvelle norme du vecteur x dans E_n; les tubes V_r sont alors des cylindres (sphères dans E_n) et $dV/dt \leq 0$ exprime que la norme de la solution ne droît pas lorsque t croît, ce que rend le théorème 6.1 complétement intuitif dans ce cas. Cependant, ainsi que l'a montré Malkin [26] , même dans le cas des systèmes autonomes $\dot{x}=f(x)$ stables il n'existe pas toujours une fonction $V(x)$ dépendant de x seulement qui satisfasse aux conditions du théorème 6.1.

Une conséquence immédiate de 6.1 est le théorème de Lagrange:

6.3. Si la fonction de forces est maximum pour une position d'équilibre d'un système dynamique conservatif, l'équilibre est stable.

En effet, si T est l'énergie cinétique et U la fonction de forces, qu'on peut supposer nulle dans la position d'équilibre, U sera définie négative par rapport aux coordonnées lagrangiennes $p_1, \ldots, p_n$ et T définie positive par rapport aux moments $q_1, \ldots, q_n$, de sorte que l'énergie totale H=T-U est définie positive par rapport à l'ensemble des coordonnées, s'annulle dans la position d'équilibre et $dH/dt \equiv 0$. Il suffit alors de prendre V=H dans 6.1.

Plus généralement:

6.4. Si un système dynamique est dissipatif (c.à d., l'énergie du système ne croît pas le long des trajectoires) les solutions pour lesquelles l'énergie a un minimum relatif sont stables.

7. Les mèmes méthodes conduisent aux théorèmes suivants sur la stabilité asymptotique et sur l'instabilité.

Nous dirons que la fonction V(x,t) a une borne supérieure infiniment petite si lorsque $x \to 0$ elle tend vers 0 uniformément par rapport à $t \in J^+$, c.à d. si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta$ entraîne $|V| < \varepsilon$ pour tout $t + J^+$. Du point de vue géométrique cela veut dire que le tube V_ε contient dans son intérieur pas seulement l'axe x=0 mais tout un cylindre $\|x\| = \delta'$, $0 < \delta' < \delta$.

7.1. (Lyapunov) S'il existe une fonction $V(x,t)$ définie positive, possédant une borne supérieure infiniment petite, et telle que dV/dt soit définie négative, alors la solution $x=0$ est asymptotiquement stable.
Soit $\delta_0>0$ tel que (Théorème 6.1) $\|x_0\| < \delta_0$ entraîne $\|F(t,x_0,0)\| < a$ pour tout $t \geqslant 0$. Puisque $V(x,t)$ décroit le long de la trajectoire, cette fonction aura une limite V_∞. Si $V_\infty > 0$ on aurait $\|x\| \geqslant \alpha > 0$ le long de la trajectoire, d'où $dV/dt \leqslant -\beta < 0$ ce qui conduirait à l'absurde $V_\infty = -\infty$. Donc $V_\infty = 0$ et $x \to 0$.
7.2 (Maračkov [30]). Si f est bornée dans $S_n \times J^+$ et s'il existe une fonction $V(x,t)$ définie positive telle que dV/dt soit définie négative, la solution $x=0$ est asymptotiquement stable.
Supposons qu'il ne soit pas ainsi, c'est à dire , qu'il existe un x_0 , $\|x_0\| < \delta_0$ et une suite $t_n \to +\infty$ tels que $\|x_n\| = \|F(t_n, x_0, 0)\| \geqslant \alpha > 0$. f étant bornée, il existe un $\tau > 0$ indépendant de n tel que $\|F(t,x_0,0)\| \geqslant \frac{\alpha}{2}$ pour $t_n - \tau \leqslant t \leqslant t_n + \tau$.
Il en résulte $dV/dt \leqslant -\beta < 0$ dans ces intervalles, d'où le même absurde $V_\infty = -\infty$ que dans la démonstration précedente.
7.3 (Corollaire) Si le système est autonome ou périodique et s'il existe une fonction $V(x,t)$ définie positive telle que dV/dt soit définie négative, la solution $x=0$ est asymptotiquement stable.
7.4 (Lyapunov) S'il existe dans $S_n(a) \times J^+$ une fonction $V(x,t)$ possédant une borne supérieure infiniment petite; si, pour un certain $t_0 \geqslant 0$, $V(x,t_0)$ prend des valeurs positives pour des x arbitrariement petits, et si dV/dt est définie **positive** , alors la solution $x=0$ est instable.

Soit x_0 tel que $V(x_0,t_0) = V_0 > 0$. Du fait que V a une borne supérieure infiniment petite il s'ensuit qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $V(x,t) \geqslant V_0$ entraîne $\|x\| \geqslant \varepsilon$. Mais, puisque $dV/dt > 0$, on aura précisement $V(x,t) \geqslant V_0$ le long de la trajectoire avec point initial (x_0,t_0), pour $t \geqslant t_0$; alors $dV/dt \geqslant k > 0$ ce qui entraînerait $V_\infty = +\infty$ si la solution $x=F(t,x_0,t_0)$ ne sortait pas de $S_n(a)$. V étant borné dans $S_n(a) \times J^+$, toutes les solutions partant de points (x_0,t_0) tels que $V(x_0,t_0) > 0$ sortent donc de $S_n(a)$ et puisque x_0 peut être pris arbitrairement petit, ceci démontre l'instabilité.

7.5. (Lyapunov) S'il existe dans $S_n(a) \times J^+$ une fonction $V(x,t)$ bornée telle que, pour un certain $t_0 \geqslant 0$, $V(x,t_0)$ prend des valeurs positives pour des x arbitrairement petits; si $dV/dt = \alpha V+W$ ou α est une constante positive et $W=W(x,t) \geqslant 0$ dans $S_n(a) \times J^+$, alors la solution $x=0$ est instable.

La démonstration commence comme pour 7.4. Du fait que, le long de la trajectoire $dV/dt = \alpha V+W \geqslant \alpha V$, il s'ensuit que $V(x,t) \geqslant V_0 \; e^{\alpha(t-t_0)}$ d'où $V_\infty = +\infty$ et la démonstration se temine comme auparavant.

On voit immédiatement qu'on peut remplacer l'hypothèse α constante positive par $\alpha = \alpha(t)$, $\int^{+\infty} \alpha(t)dt = +\infty$.

Nous verrons dans la seconde partie que, si les racines caractéristiques de la matrice, constante A ont leurs parties réelles toutes négatives, ou bien, s'il y a une racine au moins avec partie réelle positive, on peut construire facilement une fonction V(que sera une forme quadratique dans les composants de x) qui jouit des propriétés énonnées dans le théorème 7.1, respectivement 7.5. Le théorème sur la stabilité en première approximation énoncé au n° 4 est donc une conséquence des théorèmes que nous venons de démontrer.

Il est important de savoir si les conditions suffisantes des théorèmes 7.1 et 7.5 sont assez générales, c'est à dire si ces conditions sont aussi nécessaires pour la stabilité asymptotique et pour l'instabilité, respectivement (nous avons vu déjà que ceci est vrai pour la question analogue rélative à la stabilité simple, le théorème 6.1 admettant le réciproque 6.2). Il n'en est pas ainsi en général .

Par exemple, le système (ou l'équation, pour n=1) $\dot{x} = -x/(t+1)$, a pour solution générale $F(t,x_0,t_0) = x_0(t_0+1)/(t+1)$, et $x=0$ est évidemment asymptotiquement stable.

S'il existait une fonction $V(x,t)$ avec les propriétés du théorème 7.1, pour chaque $\varepsilon>0$ on trouverait deux nombres positif δ et k tels que $\|x\| \leq \delta$ entraîne $0 \leq V(x,t) \leq \varepsilon$

$\|x\| \geq \delta/2$ " $dV/dt \leq -k$.

Prenons $t_0 \geq 0$ quelconque, $\|x_0\| = \delta$; dans l'intervalle (t_0,t_1) où $t_1 = 2t_0+1$ on a $\|x_0\| \geq \frac{\delta}{2}$, donc

$$V(x_1,t_1) - V(x_0,t_0) \leq -k(t_0+1)$$

d'où la contradiction $V(x_1,t_1) < 0$ pour $t_0 > \varepsilon/k$.

Donc, avant d'aborder le problème des conditions nécessaires il faut généraliser et préciser les résultats démontrés dans ce numéro. C'est ce que nous ferons dans les numéros suivants.

8. Si dans la définition de stabilité donnée au numéro 1, on suppose qu'on peut trouver un $\delta>0$ indépendant de t_0, on dira que x=0 est uniformément stable, c.à.d. pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un $\delta(\varepsilon)>0$ tel que $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \geq 0$ quelconque, entraîne $\|F(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon$ pour $t \geq t_0$.

Analoguement, on peut définir la stabilité asymptotico-uniforme de la façon suivante; la solution $x=0$ est asymptotico-uniformément stable lorsqu'elle est uniformément stable et il existe un $\delta_0 > 0$ fixe et, pour chaque $\varepsilon > 0$, un $T(\varepsilon) > 0$ tels que pour chaque point initial (x_0, t_0), $\|x_0\| < \delta_0$, $t_0 \geqslant 0$ quelconque, on aura $\|F(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$ pour $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$. Autrement dit, la limite $F(t, x_0, t_0) \to 0$ pour $t \to +\infty$ est uniforme par rapport à x_0 et t_0.

Persidskiĭ [37] et Malkin [29] ont demontré les théorèmes suivantes, dont le second précise beaucoup le théorème 7.1 de Lyapunov:

8.1 S'il existe une fonction $V(x,t)$ définie positive, ayant une borne supérieure infiniment petite et telle que $dV/dt \leqslant 0$, la solution $x=0$ est uniformément stable.

Etant donné $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que $\|x\| \geqslant \varepsilon$ entraîne $V(x,t) \geqslant \eta$; puis il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta$ entraîne $V(x,t) < \eta$. Si $\|x_0\| < \delta$, $t_0 \geqslant 0$ quelconque, on aura $V(x_0, t_0) < \eta$ et puisque $dV/dt \leqslant 0$, $V(x,t) < \eta$ pour tout $t \geqslant t_0$, $x = F(t, x_0, t_0)$, d'où $\|x\| < \varepsilon$.

8.2. S'il existe une fonction $V(x,t)$ définie positive, ayant une borne supérieure infiniment petite et telle que dV/dt soit définie négative, la solution $x=0$ est asymptotico-uniformément stable.

La stabilité est uniforme d'après 8.1; il existe donc un $\delta_0 > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta_0$, $t_0 \geqslant 0$ quelconque, entraîne $\|F(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon_0$, ε_0 étant positif et $< a$; soit M une borne de $V(x,t)$ dans $S_n(\varepsilon_0) \times J^+$ qui existe toujours pour ε_0 assez petit puisque V a une borne supérieure infiniment petite. Dans la suite δ_0, ε_0 et M seront des nombres fixes.

Etant donné $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$ il existe, d'après 8.1, un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ entraîne $\|F(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon$ pour $t \geqslant t_0$; soit $-m(\varepsilon) < 0$ une borne supérieure de dV/dt pour l'ensemble des points (x,t) vérifiant $\delta(\varepsilon) \leq \|x\| \leqslant \varepsilon_0$, $t \geqslant 0$; et finalement $T(\varepsilon) > M/m(\varepsilon)$.
Soit $\|x_0\| \leq \delta_0$, $t_0 \geqslant 0$ quelconque. Alors $V(x_0,t_0) = V_0 \leqslant M$.
Si on suppose que dans l'intervalle (t_0,t_1) on a $\|F(t,x_0,t_0)\| \geqslant \delta(\varepsilon)$ il en resulte $0 \leqslant V(x_1,t_1) = V_0 + \int_{t_0}^{t_1} (dV/dt)dt \leqslant M - m(t_1 - t_0)$, d'où $t_1 < t_0 + T(\varepsilon)$.
Il y a donc dans l'intervalle $(t_0, t_0+T(\varepsilon))$ au moins une valeur t_1 telle que $\|x_1\| = \|F(t_1,x_0,t_0)\| < \delta(\varepsilon)$, d'où pour $t \geqslant t_1$ et à fortiori pour $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$, on a $\|F(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon$.
Le théorème suivant étend et précise un résultat de Massera [31]:
8.3. Si le système est autonome ou périodique, la stabilité (stabilité asymptotique) entraîne la stabilité uniforme (asymptotico-uniforme).
Supposons que $x=0$ soit stable. Alors, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x_1\| < \delta_1(\varepsilon)$ entraîne $\|F(t,x_1,0)\| < \varepsilon$ pour $t \geqslant 0$. Le tronçon de tube formé par les points (x,t) tels que $0 \leqslant t \leqslant \tau$ (τ étant la période du système) et $x = F(t,x_1,0)$ où $\|x_1\| = \delta_1(\varepsilon)$ contient dans son intérieur un certain cylindre $\|x\| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$.
Soit maintenant $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ et $t_0 \geqslant 0$ quelconque, $t \geqslant t_0$, m le plus grand entier positif contenu dans t_0/τ, $t_0' = t_0 - m\tau$, $t' = t - m\tau$, d'où $0 \leqslant t_0' \leqslant \tau$, $t' \geqslant t_0'$. Alors

$$\|F(t,x_0,t_0)\| = \|F(t',x_0,t_0')\| = \|F(t',x_1,0)\|$$

où $x_1 = F(0,x_0,t_0')$. Mais, puisque $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, on aura

$\|x_1\| < \delta_1(\varepsilon)$ et $\|F(t',x_1,0)\| < \varepsilon$, ce qui démontre la stabilité uniforme.

Supposons maintenant que x=0 soit asymptotiquement stable. Soit $\varepsilon_o > 0$ un nombre assez petit, mais fixe, et $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_o)$, $\delta_o = \delta(\varepsilon_o)$, où $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)$ sont les fonctions définies il y a un instant. **Admettons** provisoirement que la **limite** $F(t,x_1,0) \to 0$ pour $t \to +\infty$ est uniforme par rapport à $\|x_1\| \leq \delta_1$, c'est à dire que, étant donné $\varepsilon > 0$ il existe un $T(\varepsilon)$ tel que $t \geqslant T(\varepsilon)$ entraîne $\|F(t,x_1,0)\| < \varepsilon$ quel que soit x_1 avec $\|x_1\| < \delta_1$. Alors, si $\|x_o\| < \delta_o$ et $t \geqslant t_o + T(\varepsilon)$ on aura comme auparavant

$$\| F(t,x_o,t_o)\| = \| F(t',x_o,t'_o)\| = \| F(t',x_1,0)\| < \varepsilon,$$

puisque $t' \geqslant t'_o + T(\varepsilon) \geqslant T(\varepsilon)$, ce qui démontre la stabilité asymptotico-uniforme.

Il suffit donc la prouver l'uniformité de la limite $F(t,x_1,0) \to 0$. Si cette limite n'était pas uniforme, il existerait un $\varepsilon > 0$ et des suites x_i, t_i avec $\|x_i\| \leq \delta_1$, $t_i \to +\infty$ telles que $\|F(t_i,x_i,0)\| \geqslant \varepsilon$.

En prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle, on peut admettre que $x_i \to \xi$, $\|\xi\| < \delta_1$; puisque $\lim F(t, \xi, 0) = 0$, il y a un $T > 0$ tel que $\|F(T, \xi, 0)\| < \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$. Mais alors, pour i suffisamment grand, on aurait, en vertu de la continuité, $\|F(T,x_i,0)\| < \delta(\varepsilon)$ d'où $\|F(t,x_i,0)\| < \varepsilon$ pour $t \geqslant T$, ce qui contredit l'hypothèse faite. La démonstration du théorème devient ainsi complète.

On peut constater que dans l'exemple du numéro précédent, quoique x=0 soit asymptotiquement stable elle n'est pas même uniformément stable, ce qu'explique que pour un tel système il n'existe pas de fonctions V(x,t) avec les propriétés énoncées (parce que cela contredirait le théorème 8.2 et même 8.1).

9. Jusqu'ici nous avons considéré la stabilité par rapport à des perturbations ou erreurs dans les conditions initiales. Pour un système physique, cependant, il y aura des perturbations ou erreurs agissant pendant toute la durée du mouvement; en d'autres mots, non seulement x_0 ne représente qu'approximativement les conditions initiales réelles mais le système $\dot{x}=f(x,t)$ lui même ne représente la loi qui gouverne le système physique qu'avec un certain dégré d'approximation. Malkin [25] et Artem'ev [2] ont été les premiers à faire cette importante remarque. Il importe alors de définir et étudier ce que les mathématiciens soviétiques appellent "stabilité sous l'action de perturbations permanentes" et que nous appellons plus simplement "stabilité totale":

Nous dirons que la solution x=0 du système $\dot{x}=f(x,t)$ est totalement stable si pour chaque $\varepsilon>0$ et $t_0 \geqslant 0$ il existe un $\delta>0$ (dépendant en général de ε et de t_0) tel que, quelle que soit la fonction g(x,t) et le vecteur x_0, satisfaisant aux conditions $\|x_0\|<\delta$, $\|f(x,t)-g(x,t)\|<\delta$ (dans $S_n(a)\times J^+$) , la solution générale $x=G(t,x_0,t_0)$ du système $\dot{x}=g(x,t)$ vérifie la condition $\|G(t,x_0,t_0)\|<\varepsilon$ pour $t \geqslant t_0$.

Il y a lieu de remarquer que nous ne supposons pas que $g(0,t)\equiv 0$, c'est à dire que x=0 ne sera plus, en général, solution du système perturbée.

9.1 (Malkin [26 bis]) S'il existe une fonction V(x,t) définie positive telle que $dV_f/dt = (\partial V/\partial t)+(\partial V/\partial x).f$ soit définie négative et si $\partial V/\partial x$ est borné dans $S_n(a)\times J^+$, la solution x=0 du système $\dot{x}=f(x,t)$ est tatalement stable (et même uniformément, c'est à dire que le δ de la définition précédente ne dépend pas, dans ce cas, de t_0).

Il faut remarquer que dans ces hypothèses V possède une borne supérieure infiniment petite, puisque $|V(x,t)| = |V(x,t) - V(0,t)| \leq M.\|x\|$ où M est une borne supérieure des dérivées partielles de V.

Soit $\varepsilon > 0$; soit $\eta_1(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x\| \geqslant \varepsilon$ entraîne $V(x,t) \geqslant \eta_1(\varepsilon)$ et $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x\| < \delta_1(\varepsilon)$ entraîne $V(x,t) < \eta_1(\varepsilon)$. Soit $\|\partial V/\partial x\| \leq M$ dans $S_n(a) \times J^+$, $\eta_2(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x\| \geqslant \delta_1(\varepsilon)$ entraîne $\partial V_f/dt \leq -\eta_2(\varepsilon)$ et $0 < \delta_2(\varepsilon) < \eta_2(\varepsilon)/M$.

Soit finalement $\delta(\varepsilon)$ le plus petit des deux $\delta_1(\varepsilon)$ et $\delta_2(\varepsilon)$.

Soient x_0, t_0 et $g(x,t)$ quelconques satisfaisant aux conditions $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \geqslant 0$ et $\|g(x,t) - f(x,t)\| < \delta(\varepsilon)$ dans $S_n(a) \times J^+$. J'affirme que $\|G(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon$ pour $t \geqslant t_0$. Supposons qu'il n'était pas ainsi; il existerait alors un intervalle (t_1,t_2), $t_0 \leqslant t_1 < t_2$, tel que si $x_1 = G(t_1,x_0,t_0)$, $x_2 = G(t_2,x_0,t_0)$ on aurait $\|x_1\| = \delta_1(\varepsilon)$, $\|x_2\| = \varepsilon$, et $\delta_1(\varepsilon) \leqslant \|G(t,x_0,t_0)\| \leq \varepsilon$ pour $t_1 \leq t \leq t_2$. Alors $V(x_1,t_1) \leq \eta_1(\varepsilon)$ et $dV_g/dt = (\partial V/\partial t) + (\partial V/\partial x).g = (dV_f/dt) + (\partial V/\partial x).(g-f) \leqslant -\eta_2(\varepsilon) + M\,\delta(\varepsilon) < -\eta_2(\varepsilon) + \eta_2(\varepsilon) = 0$; donc $V(x_2,t_2) < \eta_1(\varepsilon)$ d'où $\|x_2\| < \varepsilon$, ce qui contredit notre hypothèse.

9.2 (Goršin [19] ; voir aussi Malkin [29]) Si la solution $x=0$ du système $\dot{x} = f(x,t)$ est asymptotico-uniformément stable, et si f satisfait à une condition de Lipschitz $\|f(x'',t) - f(x',t)\| \leq M\|x''-x'\|$, où M est une constante (indépendante de t), alors la solution $x=0$ est totalement stable (et même uniformément). $\varepsilon > 0$ étant donné, il y a un $\delta_1(\varepsilon) > 0$ et un $T(\varepsilon) > 0$ tels que (x_0,t_0) étant quelconque, $\|x_0\| < \delta_1(\varepsilon)$, $t_0 \geqslant 0$, on aura $\|F(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon/2$ pour tout $t \geqslant t_0$ et $\|F(t_1,x_0,t_0)\| < \delta_1(\varepsilon)/2$ pour

$t_1=t_0+T(\varepsilon)$. Soit $\delta_2(\varepsilon)=M\delta_1(\varepsilon)e^{-MT(\varepsilon)}/2$, et supposons $\|x_0\|<\delta_1(\varepsilon)$, $t_0\geqslant 0$, $\|f(x,t)-g(x,t)\|<\delta_2(\varepsilon)$.

Soient $x(t)=F(t,x_0,t_0)$ et $y(t)=G(t,x_0,t_0)$ les solutions des systèmes $\dot{x}=f(x,t)$ et $\dot{x}=g(x,t)$ passant par le même point (x_0,t_0), et soit $\rho(t)=\|x(t)-y(t)\|$.

$$\dot{\rho}(t)\leq\|f(x(t),t)-g(y(t),t)\|\leq\|f(x(t),t)-f(y(t),t)\|+$$
$$+\|f(y(t),t)-g(y(t),t)\|\leq M\rho(t)+\delta_2(\varepsilon).$$

Il en résulte $\rho(t)\leq\dfrac{\delta_2(\varepsilon)}{M}\left(e^{M(t-t_0)}-1\right)<\dfrac{\delta_2(\varepsilon)}{M}e^{M(t-t_0)}$ pour $t\geqslant t_0$ et, dans l'intervalle (t_0,t_1), $\rho(t)<\dfrac{\delta_2(\varepsilon)}{M}e^{MT(\varepsilon)}=$
$=\delta_1(\varepsilon)/2\leq\varepsilon/2$.

Dond $\|G(t,x_0,t_0)\|<\varepsilon$ pour $t_0\leq t\leq t_1$ et $\|x_1\|=\|G(t_1,x_0,t_0)\|<$ $<\delta_1(\varepsilon)$. On peut alors repéter pour le point (x_1,t_1) le même raisonnement que pour (x_0,t_0) et on arrive à $\|G(t,x_0,t_0)\|<\varepsilon$ pour $t_1\leq t\leq t_2=t_0+2T(\varepsilon)$, $\|x_2\|=$ $=\|G(t_2,x_0,t_0)\|<\delta_1(\varepsilon)$, et ainsi de suite. Donc $\|G(t,x_0,t_0)\|<\varepsilon$ pour tout $t\geqslant t_0$.

9.3 Si le système est autonome ou périodique, et si $f(x,t)$ satisfait à une condition de Lipschitz, la stabilité asymptotique de la solution $x=0$ entraîne sa stabilité totale.

Ce théorème se déduit immédiatement de 8.3 et 9.2. Dans le numéro 20 nous démontrerons le réciproque de 9.3, de sorte que pour les systèmes autonomes ou périodiques satisfaisant à une condition de:Lipschitz les concepts de stabilité asymptotique et de stabilité totale sont équivalents.

10. Une autre question qui peut être importante pour les applications est la suivante. Dans les définitions de stabilité données au n° 1, les perturbations initiales x_0 admises sont "suffisamment petites", c'est à dire que la stabilité ainsi définie est une propriété locale.